Mathematisches Institut
der Universität Bonn
S. Geschke, B. Irrgang

SoSe 2010
23. 06. 2010
Blatt 9

Übungen zur Mathematischen Logik

Sei τ ein Vokabular. Eine Formel ohne Quantoren heißt Π^0_0- bzw. Σ^0_0-Formel. Definiere rekursiv: Eine Formel $\exists x_1 \dots \exists x_n\, \varphi$ heißt Σ^0_{n+1}-Formel, wenn φ eine Π^0_n-Formel ist. Eine Formel $\forall x_1 \dots \forall x_n\, \varphi$ heißt Π^0_{n+1}-Formel, wenn φ eine Σ^0_n-Formel ist.

Eine Klasse K von τ-Strukturen heiße abgeschlossen unter Substrukturen, wenn mit jedem $\mathfrak{A} \in K$ auch alle Substrukturen $\mathfrak{B} \leq \mathfrak{A}$ Elemente von K sind.

Eine Folge $(\mathfrak{A}_n \mid n \in \mathbb{N})$ von τ-Strukturen mit

$$\mathfrak{A}_0 \leq \mathfrak{A}_1 \leq \dots \leq \mathfrak{A}_n \leq$$

heißt Kette. Eine Klasse K von τ-Strukturen heißt abgeschlossen unter Ketten, wenn für alle Ketten $(\mathfrak{A}_n \mid n \in \mathbb{N})$ mit $\mathfrak{A}_n \in K$ auch $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{A}_n \in K$ ist.

33. (a) Zeigen Sie: Ist T eine Menge von Π^0_1-Aussagen, so ist $Mod(T)$ abgeschlossen unter Substrukturen.

(b) Geben Sie jeweils ein Vokabular τ und Theorien T an, so dass $Mod(T)$ (1) unter Substrukturen und unter Ketten, (2) unter Ketten aber nicht unter Substrukturen, (3) weder unter Substrukturen noch unter Ketten abgeschlossen ist. Verwenden Sie Beispiele aus der Algebra und Ordnungstheorie.

34. Zeigen Sie: Ist T eine Menge von Π^0_2-Aussagen, so ist $Mod(T)$ abgeschlossen unter Ketten.

35. Sei $\mathfrak{A}$ ein beliebiges Modell der Peano-Arithmetik PA. Zeigen Sie, dass dann $(\mathbb{N}, 0, ', +, \cdot, <) \leq \mathfrak{A}$ ist. Folgern Sie daraus, dass für alle Σ^0_1-Aussagen $\varphi \quad PA \vdash \varphi$ und $(\mathbb{N}, 0, ', +, \cdot, <) \models \varphi$ äquivalent sind.

36. Zeigen Sie: Eine unendliche Menge $R \subseteq \mathbb{N}$ ist genau dann entscheidbar, wenn es eine streng monoton wachsende, berechenbare Funktion $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gibt mit $rng(F) = R$.

Jede Aufgabe wird mit 8 Punkten bewertet.

Abgabe: am 30. 06. 2010 vor der Vorlesung