Mathematisches Institut
der Universität Bonn
S. Geschke, B. Irrgang

SoSe 2010
16. 06. 2010
Blatt 8

Übungen zur Mathematischen Logik

Sei τ ein Vokabular. Eine Klasse K von τ-Strukturen heißt endlich axiomatisierbar, wenn es eine endliche Theorie T über τ gibt mit $Mod(T) = K$.

29. Sei $\tau = \{<\}$ das Vokabular der Ordnungstheorie. Zeigen Sie, dass die Klasse der unendlichen, linearen Ordnungen axiomatisierbar, aber nicht endlich axiomatisierbar ist.

30. Beweisen Sie: Es gibt einen angeordneten Körper $(\mathbb{R}^*, +^*, \cdot^*, <^*)$, der $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ elementar erweitert, d.h. $(\mathbb{R}, +, \cdot, <) \prec (\mathbb{R}^*, +^*, \cdot^*, <^*)$, so dass ein $h \in \mathbb{R}^*$ existiert mit $0 <^* h <^* x$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$.

31. (Fortsetzung von Aufgabe 30) Zeigen Sie: $(\mathbb{R}^*, +^*, \cdot^*, <^*)$ ist nicht ordnungsvollständig. Warum widerspricht das nicht der Elementarität der Erweiterung?

Ein $x \in \mathbb{R}^*$ heiße unendlich groß, falls $r <^* x$ für alle $r \in \mathbb{R}$ gilt.

32. (Fortsetzung von Aufgabe 30) Sei $\varphi(x_0, \ldots, x_n)$ eine Formel und seien $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^*$. Sei $X = \{a \in \mathbb{R} \mid (\mathbb{R}^*, +^*, \cdot^*, <^*) \models \varphi[a, a_1, \ldots, a_n]\}$ (nach oben) unbeschränkt in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann ein unendlich großes $a \in \mathbb{R}^*$ existiert mit $(\mathbb{R}^*, +^*, \cdot^*, <^*) \models \varphi[a, a_1, \ldots, a_n]$.

Jede Aufgabe wird mit 8 Punkten bewertet.

Abgabe: am 23. 06. 2010 vor der Vorlesung