Mathematisches Institut
der Universität Bonn
S. Geschke, B. Irrgang

SoSe 2010
09. 06. 2010
Blatt 7

Übungen zur Mathematischen Logik

25. Sei T eine Theorie, φ, ψ Aussagen und χ eine Formel. Zeigen Sie, dass $T \cup \{\varphi, \psi\} \vdash \chi$ genau dann gilt, wenn $T \cup \{\varphi \wedge \psi\} \vdash \chi$.

26. (a) Geben Sie eine Bijektion zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ an.

(b) Geben Sie eine Bijektion zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}^*$ an.

27. Sei I eine nicht leere Menge und τ ein Vokabular. Für jedes $i \in I$ sei $\mathfrak{A}_i$ eine τ-Struktur. Definiere eine τ-Struktur $\Pi_{i\in I}\mathfrak{A}_i$ durch:

Die Trägermenge ist $\Pi_{i\in I}A_i := \{g : I \to \bigcup_{i\in I} A_i \mid g(i) \in A_i \text{ für alle } i \in I\}$.

Für n-stellige Relationssymbole und $g_1, \ldots, g_n \in \Pi_{i\in I}A_i$ gilt:
$(g_1, \ldots, g_n) \in R^{\Pi_{i\in I}\mathfrak{A}_i} :\Leftrightarrow (g_1(i), \ldots, g_n(i)) \in R^{\mathfrak{A}_i}$ für alle $i \in I$.

Für n-stellige Funktionssymbole f und $g_1, \ldots, g_n \in \Pi_{i\in I}A_i$ gilt:
$f^{\Pi_{i\in I}\mathfrak{A}_i}(g_1, \ldots, g_n) := \langle f^{\mathfrak{A}_i}(g_1(i), \ldots, g_n(i)) \mid i \in I\rangle$.

Für Konstantensymbole c gilt: $c^{\Pi_{i\in I}\mathfrak{A}_i} := \langle c^{\mathfrak{A}_i} \mid i \in I\rangle$.

Zeigen Sie: Ist $t(x_1, \ldots, x_n)$ ein Term und sind $g_1, \ldots, g_n \in \Pi_{i\in I}A_i$, so gilt
$t^{\Pi_{i\in I}\mathfrak{A}_i}[g_1, \ldots, g_n] = \langle t^{\mathfrak{A}_i}[g_1(i), \ldots, g_n(i)] \mid i \in I\rangle$.

28. Sei τ ein Vokabular. Die Menge der Hornformeln über τ ist die kleinste Menge $H \subseteq Fml_\tau$, so dass gilt:

(i) Jede atomare Formel und jede Negation einer atomaren Formel ist in H.
(ii) Für atomare $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ ist $(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_{n-1} \to \varphi_n)$ in H.
(iii) Mit φ und ψ ist auch $(\varphi \wedge \psi)$, $\forall x\ \varphi$ und $\exists x\ \varphi$ in H.

Sei nun ψ eine Hornformel ohne freie Variablen und seien $\mathfrak{A}_i$ für $i \in I$ τ-Strukturen mit $\mathfrak{A}_i \models \psi$. Zeigen Sie, dass dann auch $\Pi_{i\in I}\mathfrak{A}_i \models \psi$ gilt.

Jede Aufgabe wird mit 8 Punkten bewertet.

Abgabe: am 16. 06. 2010 vor der Vorlesung