

Übungen zur Mathematischen Logik

13. Formulieren und beweisen Sie ein Quersummenkriterium für Terme.

Sei τ ein Vokabular. Eine Formel $\varphi(v_1, \dots, v_n)$ heißt genau dann erfüllbar, wenn es eine τ -Struktur $\mathfrak{M} = (M, \dots)$ und $x_1, \dots, x_n \in M$ gibt, so dass $\mathfrak{M} \models \varphi[x_1, \dots, x_n]$.

14. Sei τ nun das Vokabular mit nur einem zweistelligen Relationssymbol r , einem einstelligen Funktionssymbol f und zwei Konstanten c, k . Zeigen Sie, dass folgende Formel erfüllbar ist:

$$\begin{aligned} & \forall v_0 \, r v_0 f v_0 \wedge \\ & \forall v_0 \forall v_1 \, (r v_0 v_1 \rightarrow \neg v_0 \equiv v_1) \wedge \\ & \forall v_0 \forall v_1 \forall v_2 \, ((r v_0 v_1 \wedge r v_1 v_2) \rightarrow r v_0 v_2) \wedge \\ & \neg r c k \wedge \neg r k c \wedge \neg c \equiv k. \end{aligned}$$

15. Eine Formel heiße positiv, falls sie \neg , \rightarrow , \leftrightarrow nicht enthält. Zeigen Sie: Jede positive Formel ist erfüllbar.

16. Sei τ ein Vokabular, $\mathfrak{A} = (A, \dots)$ eine τ -Struktur und $\bar{a} = (a_1, \dots, a_m) \in A^m$. Zeigen Sie, dass für alle Terme $t(x_1, \dots, x_n)$ und t_1, \dots, t_n

$$t(t_1, \dots, t_n)^{\mathfrak{A}}[\bar{a}] = t^{\mathfrak{A}}[t_1^{\mathfrak{A}}[\bar{a}], \dots, t_n^{\mathfrak{A}}[\bar{a}]]$$

gilt.

Jede Aufgabe wird mit 8 Punkten bewertet.

Abgabe: am 12. 05. 2010 vor der Vorlesung