Die Struktur von pcf

Auf Grundlage von Jech - Set Theory - The Singular Cardinal Problem

von Johannes Vößing

Die Theorie der ***p**ossible **c**o**f**inalities* betrachtet die Konfinalitäten von Ultraprodukten auf einer Menge regulärer Kardinalzahlen. Dabei werden die Funktionen des Produktraums durch einen Ultrafilter so stark identifiziert, dass die Äquivalenzklassen linear geordnet sind. Damit existieren für jeden dieser Räume eine konfinale Menge regulärer Kardinalität, die bezüglich der Ordnung eine aufsteigende, konfinale Sequenz induziert, einen sogenannten Scale. Umgekehrt gilt im allgemeinen, dass das Bild eines Scales einer partiellen Ordnung schon eine minimal mächtige, konfinale Menge ist. Diese Verbindung zwischen Scales und Konfinalitäten werden im folgenden noch eine tragende Rolle spielen. Gewisserweise zeigt diese auf, wie wir einen (nichtmaximalen) Filter sukzessiv durch Filterelemente erweitern müssen, um an ein Ultraprodukt bestimmter Konfinalität heranzukommen. Zuerst wollen wir das Gesagte spezifizieren, und die ersten Konsequenzen ableiten.

Sei A eine Menge regulärer Kardinalzahlen und $D \in F_{ult}(A)$, der Menge aller Ultrafilter auf A. Weiter sei $\prod A := \prod_{a\in A} a$ die Menge aller Abbildungen von A nach $\bigcup A$ mit $f(a) \in a$. Dann ist das Ultraprodukt $(\prod A/D, <_D)$ eine Lineare Ordnung. Seien $f, g \in \prod A$, dann gilt

$$f <'_D g \longleftrightarrow [f] <_D [g].$$

Dies ermöglicht uns mit Repräsentanten zu arbeiten. Sofern keine Missverständnisse zu befürchten sind, werden wir zwischen Äquivalenzklassen und Repräsentanten, sowie die zugehörigen Ordnungen $<'_D$ und $<_D$ nicht weiter unterscheiden. Trotzdem wollen wir darauf hinweisen, dass es sich jeweils um verschiedene mathematische Objekte handelt, mit denen i.a. (also insb. außerhalb Ordnungsfragen) unterschiedlich umzugehen ist.

Wir sagen D habe Konfinalität μ, wenn das Ultraprodukt (Wahre-)Konfinalität μ hat und definieren

$$\mathrm{cof}(D) \ := \ \mathrm{tcf}(\prod A/D, <_D) \ = \ \mathrm{tcf}(\prod A, <'_D).$$

Man überlege sich, dass $\mathrm{cof}(D)$ regulär ist: Es existiert eine aufsteigende, konfinale Folge $\langle f_\alpha | \alpha < \mathrm{cof}(D)\rangle$ in P. Dann erfüllt aber schon $\langle f_{\vartheta_i} | i < \mathrm{cf}\ \mathrm{cof}(D)\rangle$ die Eigenschaft, mit einer konfinalen, wachsenden Folge (ϑ_i) in $\mathrm{cof}(D)$. Die Menge der *möglichen Konfinalitäten von A* definieren wir nun durch

$$\mathrm{pcf}(A) \ := \ \{\, \mathrm{cof}(D) \mid D \in F_{ult}(A)\,\}\,.$$

Wann immer wir für eine reguläre Kardinalzahl λ nachweisen wollen, dass $\lambda \in \mathrm{pcf}(A)$, reicht es nach Definition aus, einen geeigneten Ultrafilter D über A anzugeben mit $\mathrm{cof}(D) = \lambda$. Beispielsweise ergibt sich ein solcher Ultrafilter in vielen Fällen dadurch, dass wir D als Erweiterung eines schon gegebenen Filters mit bestimmten Eigenschaften

wählen. Dies ist mittels Zornschen Lemma in (ZFC) stets möglich.
Sei D ein Ultrafilter über einer Menge I und $X \in D$. Dann definieren wir $D|X := \{N \subset X \ : \ N \in D\}$ die Einschränkung von D auf X und man prüft leicht nach, dass $D|X \in F_{ult}(X)$. Sei umgekehrt $D' \in F_{ult}(X)$, dann existiert ein eindeutiges $D \in F_{ult}(I)$ mit $D|X = D'$. Außerdem ist nicht schwer einzusehen, dass $\mathrm{cof}(D) = \mathrm{cof}(D')$ gilt, da die induzierten Ultraprodukte ordnungsisomorph sind. Sei B Teilmenge von A, dann folgt daraus:

$$(24.7.0) \qquad \mathrm{pcf}(B) \ = \ \{\, \mathrm{cof}(D) \mid D \in F_{ult}(A) \ \wedge \ B \in D \,\}\,.$$

Seien A_1, A_2 und A Mengen regulärer Kardinalzahlen.
Dann gilt:

$$\begin{array}{lrl} (24.7) & \text{(i)} & A_1 \subset A_2 \ \longrightarrow \ \mathrm{pcf}(A_1) \subset \mathrm{pcf}(A_2). \\ & \text{(ii)} & A \subset \mathrm{pcf}(A). \\ & \text{(iii)} & \mathrm{pcf}(A_1 \cup A_2) \ = \ \mathrm{pcf}(A_1) \cup \mathrm{pcf}(A_2). \\ & \text{(iv)} & |\,\mathrm{pcf}(A)| \leq 2^{2^{|A|}}. \\ & \text{(v)} & \sup \mathrm{pcf}(A) \leq |\prod A|. \end{array}$$

(i) ist unmittelbare Konsequenz aus (24.7.0).
(ii) folgt aus $\mathrm{pcf}(\{\lambda\}) = \{\lambda\}$ für $\lambda \in \mathrm{Card}_{reg}$ und (i).
(iii) $\mathrm{pcf}(A_1 \cup A_2) = \{\, \mathrm{cof}(D) \mid D \in F_{ult}(A_1 \cup A_2)\,\}$
$= \{\, \mathrm{cof}(D) \mid D \in F_{ult}\,(A_1 \cup A_2) \ \wedge \ (A_1 \in D \vee A_2 \in D)\,\}$
$= \{\, \mathrm{cof}(D) \mid (D \in F_{ult}\,(A_1 \cup A_2) \wedge A_1 \in D) \ \vee \ (D \in F_{ult}\,(A_1 \cup A_2) \wedge A_2 \in D)\,\}$
$= \{\, \mathrm{cof}(D) \mid D \in F_{ult}(A_1)\,\} \ \cup \ \{\, \mathrm{cof}(D) \mid D \in F_{ult}(A_2)\,\} = \mathrm{pcf}(A_1) \cup \mathrm{pcf}(A_2)$.
Dabei benutzen wir beim zweiten Gleichheitszeichen die Ultraeigenschaft.
(iv) Wähle eine Auswahl $(D_\lambda)_{\lambda \in \mathrm{pcf}(A)}$ mit $\mathrm{cof}(D_\lambda) = \lambda$.
Dann ist diese injektiv in $F_{ult}(A) \subset P(P(A))$.
(v) Für alle $D \in F_{ult}(A)$ gilt $\mathrm{cof}(D) \leq |\prod A/D| \leq |\prod A|$.

Folgendes Lemma zeigt gewissermaßen, dass pcf unter mehrmaligen Anwenden[1] abgeschlossen ist.

Lemma 24.24.
Sei A Menge regulärer Kardinalzahlen, so gilt:

$$|\mathrm{pcf}(A)| < \min(A) \ \longrightarrow \ \mathrm{pcf}(A) = \mathrm{pcf}(\mathrm{pcf}(A)).$$

Beweis. Der einfachhalber setzen wir $B := \mathrm{pcf}(A)$. Wähle eine Familie $(D_\lambda)_{\lambda \in B}$ von Ultrafiltern auf A mit $\mathrm{cof}(D_\lambda) = \lambda$ und für alle $\lambda \in B$ einen λ-Scale[2] $\langle f^\lambda_\alpha | \alpha < \lambda \rangle$ in $(\prod A, <_{D_\lambda})$. Es reicht wegen (24.7.ii) aus, $\mathrm{pcf}(B) \subset B$ zu zeigen.

[1]Man beachte, $\min \mathrm{pcf}(A) = \min A$.
[2]Eine in der Ordnung strikt wachsende und konfinale Sequenz der Kardinalität λ.

Sei also $\mu \in \mathrm{pcf}(B)$. Wähle ein $D \in F_{ult}(B)$ mit $\mathrm{cof}(D) = \mu$ und eine in $(\prod B, <_D)$ wachsende, konfinale Folge $\langle g_\alpha | \alpha < \mu \rangle$.
Wir geben im folgenden einen Ultrafilter E auf A und eine zugehörigen konfinale, μ-gerichtete Menge an. Damit folgt $\mathrm{cof}(E) = \mu$, also $\mu \in B$. Setze

$$E := \{ X \in P(A) \mid \{ \lambda \in B \mid X \in D_\lambda \} \in D \} .$$

D.h. E enthält all jene Teilmengen von A, die in D-fast jedem Filter von (D_λ) enthalten sind. Dann ist $E \in F_{ult}(A)$: [3]

(F1) $[A \in D_\lambda]_{\lambda,B} = B \in D \ \wedge \ [\emptyset \in D_\lambda]_{\lambda,B} = \emptyset \notin D.$

(F2) $X, Y \in E \ \Rightarrow \ [X \in D_\lambda]_{\lambda,B} \in D \wedge [Y \in D_\lambda]_{\lambda,B} \in D.$
$\Rightarrow \ [X \in D_\lambda]_{\lambda,B} \cap [Y \in D_\lambda]_{\lambda,B} \in D$
$\Rightarrow \ [X \in D_\lambda \wedge Y \in D_\lambda]_{\lambda,B} = [X \cap Y \in D_\lambda]_{\lambda,B}$
$\Rightarrow \ X \cap Y \in E.$

(F3) $X \subset Y \subset A \ \wedge \ X \in E \ \Rightarrow \ [X \in D_\lambda]_\lambda \subset [Y \in D_\lambda]_\lambda \ \Rightarrow \ [Y \in D_\lambda]_\lambda \in D$
$\Rightarrow \ Y \in E.$

(F4) $X \notin E \ \Rightarrow \ [X \in D_\lambda]_\lambda \notin D \ \Rightarrow \ [X \in D_\lambda]^c_\lambda \in D$
$\Rightarrow \ [X \notin D_\lambda]_\lambda \in D \ \Rightarrow \ [X^c \in D_\lambda]_\lambda \ \Rightarrow \ X^c \in E.$

Dabei benutzen wir die Ultraeigenschaft von D und von jedem Bild von (D_λ). Die Umkehrrichtung in (F4) folgt aus (F1) und (F2). Nun sei $\langle h_\alpha | \alpha < \mu \rangle$ eine Sequenz mit

$$h_\alpha(a) \ = \ \sup_{\lambda \in B} f^\lambda_{g_\alpha(\lambda)}(a) \quad , \ a \in A.$$

Wir zeigen, dass das Bild dieser Sequenz schon eine minimal konfinale Menge in $(\prod A, <_E)$ ist.

> Für alle $\alpha < \mu$ und für alle $\lambda \in B$ ist $g_\alpha(\lambda) < \lambda$ und damit h_α wohldefiniert. Nach Voraussetzung ist $|B| < \min A$ und damit für alle $a \in A$ $\{ f^\lambda_{g_\alpha(\lambda)}(a) \mid \lambda \in B \} \subset a$ beschränkt in a. Also ist das Supremum in a und damit (h_α) eine Sequenz in $\prod A$.
>
> Nun wählen wir uns eine Auswahl, die jedem $h \in \prod A$ ein $p_h \in \prod B$ zuordnet, so dass $h <_{D_\lambda} f^\lambda_{p_h(\lambda)}$ für alle $\lambda \in B$ gilt. Man überzeuge sich, dass eine solche Auswahl existiert: Zu jedem h und jedem λ existiert ein α, so dass $h <_{D_\lambda} f^\lambda_\alpha$.
>
> Wir zeigen nun, dass für alle h gilt:
>
> $$(*) \quad (\forall \alpha < \mu)(\ p_h <_D g_\alpha \longrightarrow h <_E h_\alpha).$$
>
> Dies impliziert schon die Behauptung, denn zu jedem $h \in \prod A$ existiert ein $\alpha < \mu$, so dass $p_h <_D g_\alpha$ und damit $h <_E h_\alpha$. Damit ist das Bild von (h_α)

[3] Für eine Formel $\phi(x)$ mit freier Variable x, bezeichnen wir mit $[\phi(x)]_{x,B}$ die Menge $\{ x \in B \mid \phi(x) \}$. Ist die Menge auf die sich bezogen wird klar, schreiben wir auch einfach $[\phi(x)]_x$.

konfinal in E. Weiter ist E μ-gerichtet[4]: Für jede Teilmenge $M \subset \prod A$ mit $|M| < \mu$ betrachte $M' := \{\, p_h \mid h \in M \,\} \subset \prod B$. Dann ist $|M'| < \mu$, also existiert ein $\alpha < \mu$, so dass g_α strikte obere Schranke von M' in D. Dann ist aber schon h_α obere Schranke von M in E. Denn für jedes $h \in M$ ist $p_h <_D g_\alpha$, also nach $(*)$ $h <_E h_\alpha$.

Es verbleibt $(*)$ zu beweisen.
Sei $h \in \prod A$ und α, so dass $g := p_h <_D g_\alpha$. Setze $X := [h <_{D_\lambda} h_\alpha]_{\lambda,A}$. Für $\lambda \in [g(y) < g_\alpha(y)]_{y,B}$ folgt $h <_{D_\lambda} f^\lambda_{g(\lambda)} <_{D_\lambda} f^\lambda_{g_\alpha(\lambda)} \leq h_\alpha$. Wobei die letzte Ordnung die punktweise Ordnung ist, also die Ordnung, die durch den Filter $\{\mathrm{A}\}$ induziert wird. Wegen $\leq_{\{A\}} \subset \leq_{D_\lambda}$[5], also $h <_{D_\lambda} h_\alpha$ und damit $\lambda \in X$.
Da $[g(y) < g_\alpha(y)]_{y,B} \in D$ folgt daraus $X \in D$,
also $\{\, \lambda \in B \mid [h(x) < h_\alpha(x)]_{x,A} \in D_\lambda \,\} \in D$, womit wir $h <_E h_\alpha$ haben.

Qed(24.24).

Als nächstes wollen wir ein mächtiges Werkzeug für den Umgang mit der pcf-Theorie entwickeln.

Definition. *Sei A Menge regulärer Kardinalzahlen. Ein System $(B_\lambda)_{\lambda \in pcf(A)}$ aus Teilmengen von A heiße* System von Generatoren bezgl. A, *falls es folgende Eigenschaft erfüllt:*

Für alle $\lambda \in pcf(A)$ gilt:

$$
\begin{aligned}
G_a(\lambda) \equiv \quad & \lambda = max\ pcf(B_\lambda). \\
G_b(\lambda) \equiv \quad & \lambda \notin pcf(A \setminus B_\lambda). \\
G_c(\lambda) \equiv \quad & \text{"Die Menge } \{\, B_\vartheta \mid \vartheta < \lambda \,\} \text{ erzeugt ein Ideal } I_\lambda \text{ auf } A \text{ und es gilt:} \\
& \textstyle\prod B_\lambda / I_\lambda \text{ hat einen } \lambda\text{-Scale".}
\end{aligned}
$$

Gewissermaßen helfen uns Generatoren, bei der 'Orientierung' in pcf(A), denn

$G_a(\lambda)$ und $G_b(\lambda)$ lassen sich nach (24.7.0) wie folgt charakterisieren:

$$
\begin{aligned}
G_a(\lambda) \quad \longleftrightarrow \quad & (\forall D \in F_{ult}(A))(\ B_\lambda \in D \rightarrow \mathrm{cof}(D) \leq \lambda) \\
\wedge\ & (\exists D \in F_{ult}(A))(\ B_\lambda \in D \wedge \mathrm{cof}(D) = \lambda).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
G_b(\lambda) \quad \longleftrightarrow \quad & (\forall D \in F_{ult}(A))(\ B_\lambda \notin D \rightarrow \mathrm{cof}(D) \neq \lambda) \\
\longleftrightarrow \quad & (\forall D \in F_{ult}(A))(\ \mathrm{cof}(D) = \lambda \rightarrow B_\lambda \in D).
\end{aligned}
$$

[4] D.h. jede Teilmenge des Produktraums der Mächtigkeit kleiner μ ist in der durch E induzierten Ordnung beschränkt.

[5] Ist D' eine Verfeinerung eines Filters D, so ist auch $<_{D'}$ eine Verfeinerung von $<_D$, sowie $=_{D'}$ von $=_D$.

Damit finden wir dann:

$$(\forall\lambda \in \mathrm{pcf}(A))(\ G_a(\lambda) \wedge G_b(\lambda)) \quad \longleftrightarrow$$
$$(\forall D \in F_{ult}(A)\ (\ \mathrm{cof}(D) = \min\{\,\lambda \in \mathrm{pcf}(A) \mid B_\lambda \in D\,\}$$
$$\wedge\ \mathrm{cof}(D) \notin \{\,\lambda \in \mathrm{pcf}(A) \mid B_\lambda \notin D\,\})).$$

Der Beweis erfolgt sehr mechanisch und wird hier nur angeschnitten:
Sei $D \in F_{ult}(A)$, dann folgt aus $(\forall\lambda \in \mathrm{pcf}(A)\ G_a(\lambda))$, die Formel $\forall\lambda\ (\ B_\lambda \in D \to \mathrm{cof}(D) \leq \lambda)$. Das heißt $\mathrm{cof}(D) \leq \min\{\,\mu \mid B_\mu \in D\,\}$. Nach $G_b(\mathrm{cof}(D))$ ist aber schon $B_{\mathrm{cof}(D)} \in D$. Also $\mathrm{cof}(D) = \min\{\,\lambda \mid B_\lambda \in D\,\}$.

Unter der Bedingung, dass jedes Element aus A gewissermaßen groß ist gegenüber der Kardinalität von A, können wir die Existenz eines Systems von Generatoren beweisen.

Theorem 24.25 (Shelah). *Sei A eine unendliche Menge regulärer Kardinalzahlen mit $2^{|A|} <$ min A. Dann existiert ein System von Generatoren $(B_\lambda)_{\lambda\in pcf(A)}$ bezgl. A.*

Maßgeblich für den Beweis des Theorems ist folgender Satz[6] den wir, hier ohne Beweis, verwenden:

Korollar 24.12. *Sei I Ideal auf A. Weiter sei $\lambda > 2^{|A|}$ eine reguläre Kardinalzahl und $\prod A$ sei λ-gerichtet in $<_I$. Dann ist $\prod A$ in $<_I$ λ^+-gerichtet, oder hat einen λ-Scale, oder es existieren $X, Y \in I^+$ mit $X\dot\cup Y = A$, so dass $(\prod A, <_I)$ ein λ-Scale auf X besitzt[7] und auf Y λ^+-gerichtet ist.*

Wir geben im Folgenden eine Rekursionsvorschrift an, die ein System $(B_\lambda)_{\lambda\in\mathrm{pcf}(A)}$ induziert.

Beweis 24.25.
Rekursionsvorschrift. Konstruiere ein Funktional $G : V \to V$ mit:

> Für eine Folge $\langle X_\lambda | \lambda \in \mathrm{pcf}(A)\ , \lambda < \kappa\rangle$ in $P(A)$ mit $\kappa = \max \mathrm{pcf}(A)$ sei $G(\langle X_\lambda\rangle) = A$.
> Sei $\kappa \in \mathrm{pcf}(A)$ und $\kappa \neq \max \mathrm{pcf}(A)$. $\langle X_\lambda\rangle$ sei Basis eines Ideals. Dann bezeichne mit I_κ dass durch $\langle X_\lambda | \lambda < \kappa\rangle$ erzeugte Ideal über A. Existiere ferner ein $Y \in I_\kappa^+$ mit $Y^c \in I_\kappa^+$, so dass I_κ einen κ-Scale auf Y besitzt und $I_\kappa[Y]$[8] ein κ^+-gerichtetes Ideal ist. Dann setze $G(\langle X_\lambda\rangle) = Y$, sonst $G(\langle X_\lambda\rangle) = A$.

Sei $(B_\lambda)_{\lambda\in\mathrm{pcf}(A)}$ dass durch G induzierte System, also $B_\kappa = G(\langle B_\lambda | \lambda < \kappa\ , \lambda \in \mathrm{pcf}(A)\rangle)$.

[6] Vergleiche Jech- Set Theory - Corollary 24.12.
[7] Damit ist gemeint: Einen Scale in $<_{I\cup X^c}$.
[8] Das durch $I_\kappa \cup \{Y\}$ erzeugte Ideal.

Für alle Kardinalzahlen κ mit $\kappa < \sup\{\,\lambda + 1 \mid \lambda \in \mathrm{pcf}(A)\,\}$ gelten dann folgende Eigenschaften:

$$\begin{aligned}
\varphi_i(\kappa): &\quad I_\kappa \text{ ist eine Ideal und ist } \kappa\text{-gerichtet.}\\
\varphi_{ii}(\kappa): &\quad \kappa \notin \mathrm{pcf}(A)\text{, dann ist } I_\kappa\ \kappa^+\text{-gerichtet.}\\
\varphi_{iii}(\kappa): &\quad \kappa \in \mathrm{pcf}(A) \text{ und } \kappa \neq \max \mathrm{pcf}(A),\\
&\quad \text{dann ist } B_\kappa \in I_\kappa^+\text{, sowie } B_\kappa^c \in I_\kappa^+\\
&\quad \text{und } I_\kappa \text{ hat einen } \kappa\text{-Scale auf } B_\kappa \text{ und } I_\kappa[B_\kappa] \text{ ist } \kappa^+\text{-gerichtet.}\\
\varphi_{iv}(\kappa): &\quad \kappa = \max \mathrm{pcf}(A),\ \text{dann hat } I_\kappa \text{ einen } \kappa\text{-Scale auf } A \text{ und } B_\kappa = A.
\end{aligned}$$

Bevor wir dies beweisen, zeigen wir, dass für alle $\lambda \in \mathrm{pcf}(A)$ folgendes gilt:

(Thm$_1$) $\quad ((\forall\kappa < \lambda \cap \mathrm{Card} \vee \kappa = \lambda)(\varphi_i(\kappa) \wedge \dots \wedge \varphi_{iv}(\kappa))) \longrightarrow (G_a(\lambda) \wedge G_b(\lambda) \wedge G_c(\lambda)).$

Damit folgt insbesondere die Behauptung des Theorems.

Beweis(Thm$_1$).

<u>$G_a(\lambda)$:</u>

> Sei $\lambda \in$ pcf(A). Wähle ein $D \in F_{ult}(A)$ mit $B_\lambda \in D$ und $D \cap I_\lambda = \emptyset$. Da B_λ nach (iii) Element in I_λ^+ ist, ist dies möglich. I_λ hat weiter nach (iii) und (iv) einen λ-Scale auf B_λ, d.h. $I_\lambda[B_\lambda^c]$ hat einen λ-Scale. Nach Eigenschaft von D ist $<_{I_\lambda[B_\lambda^c]} \subset <_D$. Damit existiert auch ein λ-Scale für $<_D$ und wir erhalten $\mathrm{cof}(D) = \lambda$, d.h. $\lambda \in \mathrm{pcf}(B_\lambda)$.
> Sei $D \in F_{ult}(A)$ mit $B_\lambda \in D$. Dann entweder $D \cap I_\lambda = \emptyset$ und damit wie oben $\mathrm{cof}(D) = \lambda$. Oder es existiert ein kleinstes $\vartheta < \lambda$ mit $B_\vartheta \in D$. Damit $I_\vartheta \cap D = \emptyset$ und analog folgt $\mathrm{cof}(D) = \vartheta$. Insgesamt also in jedem Fall $\mathrm{cof}(D) \leq \lambda$.

<u>$G_b(\lambda)$:</u>

> Sei $D \in F_{ult}(A)$ mit $B_\lambda \notin D$. Dann entweder $B_\vartheta \in D$ für eine $\vartheta < \lambda$ und in diesem Fall $\mathrm{cof}(D) < \lambda$. Oder $D \cap I_\lambda[B_\lambda] = \emptyset$. Nach (iii) ist $I_\lambda[B_\lambda]$ λ^+-gerichtet, womit aus $<_{I_\lambda[B_\lambda]} \subset <_D$ folgt, dass D λ^+-gerichtet ist, also $\mathrm{cof}(D) > \lambda$. In jedem Fall $\mathrm{cof}(D) \neq \lambda$.

<u>$G_c(\lambda)$:</u>

> Dies ist eine unmittelbare Konsequenz aus (iii) und (iv).

Qed(Thm$_1$)

Wir zeigen obige Eigenschaften via simultane Induktion über *Card*. Genauer: Für jede Kardinalzahl κ kleiner als das Supremum, oder gleich dem Maximum von pcf(A) gilt:

$$((\forall\lambda < \kappa \cap \mathit{Card})(\ \varphi_i(\lambda) \wedge \dots \wedge \varphi_{iv}(\lambda))) \longrightarrow (\varphi_i(\kappa) \wedge \dots \wedge \varphi_{iv}(\kappa)).$$

$\underline{\varphi_i(\kappa):}$

Sei $\kappa \leq \min \text{pcf}(A)$.

> Dann ist $I_\kappa = \{\emptyset\}$, nach Definition der I_λ. Das ist sicherlich ein Ideal. Damit ist $\prod(A)/I_\kappa \cong \prod A$. Sei $M \subset \prod A$ mit $|M| < \kappa$. Dann ist $\{ f(\alpha) \mid f \in M \}$ wegen $\kappa \leq \min A$ nicht konfinal in α, für alle $\alpha \in A$. Damit ist M beschränkt, also I_κ κ-gerichtet.

Sei $\kappa > \min \text{pcf}(A)$.

> Sei κ Limeskardinalzahl.
> Dann gilt $I_\kappa = \bigcup_{\lambda<\kappa} I_\lambda$. Nach Voraussetzung sind alle I_λ Ideale und λ-gerichtet . Außerdem bildet $(I_\lambda)_{\lambda<\kappa}$ eine aufsteigende Kette. Man verifiziere sofort durch Überprüfung der Idealeigenschaften, dass dann auch I_κ Ideal ist. Außerdem bildet dann auch $(<_{I_\lambda})_{\lambda<\kappa}$ eine aufsteigende Kette. Damit ist I_κ κ-gerichtet.
>
> Sei $\kappa = \lambda^+$.
> Entweder $\lambda \notin \text{pcf}(A)$. Dann ist $I_\kappa = I_\lambda$ Ideal nach (i) und $\kappa = \lambda^+$-gerichtet nach (ii). Oder $\lambda \in \text{pcf}(A)$. Dann ist $I_\kappa = I_\lambda[B_\lambda]$ Ideal, da $B_\lambda^c \in I_\lambda^+$ und λ^+-gerichtet nach (iii).

$\underline{\varphi_{ii}(\kappa):}$

Sei also $\kappa \notin \text{pcf}(A)$. Für $\kappa < \min A$ folgt die Behauptung wie oben. Also $\kappa > \min A$ und nach Voraussetzung des Theorems $\kappa > 2^{|A|}$.

Wenn κ singulär:

> Sei $M \subset \prod A$ mit $|M| = \kappa$. Und sei $\langle \vartheta_i | i < \text{cf } \kappa \rangle$ konfinal in κ. Sei außerdem $\langle m_\alpha | \alpha < \kappa \rangle$ eine Anordnung von M. Dann existiert zu jedem $i < \text{cf } \kappa$ ein m_i', so dass m_i' obere Schranke von $\{ m_\alpha \mid \alpha < \vartheta_i \}$ in I_κ ist, da nach $\varphi_i(\kappa)$ I_κ κ-gerichtet ist. Sei M' Bild einer solchen Auswahl. Dann ist $|M'| = \text{cf } \kappa < \kappa$ und damit M' in I_κ beschränkt. Also auch M. Also ist I_κ schon κ^+-gerichtet.

Wenn κ regulär:

> Nehmen wir an, I_κ sei nicht κ^+-gerichtet. Nach $\varphi_i(\kappa)$ ist das Ideal κ-gerichtet. Es sind die Voraussetzungen von Korollar 24.12 erfüllt und demnach existiert ein $X \in I_\kappa^+$, so dass I_κ einen κ-Scale auf X hat. Wähle ein $D \in F_{ult}(D)$ mit $X \in D$ und $D \cap I_\kappa = \emptyset$. Dann ist $<_{I_\kappa[X^c]} \subset <_D$. Also $\text{cof}(D) = \kappa$ und damit

$\kappa \in \mathrm{pcf}(A)$, im Widerspruch zur Voraussetzung.

$\underline{\varphi_{iii}(\kappa):}$

Sei $\kappa \in \mathrm{pcf}(A)$ und $\kappa \neq \max \mathrm{pcf}(A)$.
Nehmen wir an, I_κ sei κ^+-gerichtet.

> Sei $D \in F_{ult}(A)$.
> Entweder $B_\lambda \in D$ für ein $\lambda < \kappa$. Dann ergibt $G_a(\lambda)$, $\mathrm{cof}(D) < \kappa$. Oder es ist $D \cap I_\kappa = \emptyset$. Dann $<_{I_\lambda} \subset <_D$ und da I_κ κ^+-gerichtet ist, ebenso D, woraus $\mathrm{cof}(D) > \kappa$ folgt. Damit $(\forall D \in F_{ult}(A))(\mathrm{cof}(D) \neq \kappa)$, also $\kappa \notin \mathrm{pcf}(A)$ im Widerspruch zur Annahme.

Nehmen wir an I_κ habe einen κ-Scale auf A.

> Für $D \in F_{ult}(A)$, entweder $B_\lambda \in D$ für ein $\lambda < \kappa$, dann $\mathrm{cof}(D) < \kappa$. Oder $D \cap I_\kappa = \emptyset$. Also hat D einen κ-Scale, womit $\mathrm{cof}(D) = \kappa$. Damit aber $\kappa = \max \mathrm{pcf}(A)$. Widerspruch.

Also ist I_κ weder κ^+-gerichtet noch hat I_κ einen κ-Scale.

> Da $\kappa \in \mathrm{pcf}(A)$ ist κ regulär und nach Voraussetzung des Theorems $\kappa > 2^{|A|}$. Also existiert nach Korollar 24.12 ein $X \in I_\kappa^+$ mit $X^c \in I_\kappa^+$, so dass I_κ einen κ-Scale auf X hat und $I_\kappa[X]$ κ^+-gerichtet ist. Nach Rekursionsvorschrift, trägt also insbesondere B_κ diese Eigenschaft.

$\underline{\varphi_{iv}(\kappa):}$

Sei nun $\kappa = \max \mathrm{pcf}(A)$. Angenommen I_κ habe keinen κ-Scale auf A. Nach Korollar 24.12 ist dann I_κ entweder κ^+-gerichtet, oder es existiert ein $Y \in I_\kappa^+ \wedge Y \neq A$, so dass $I_\kappa[Y]$ κ^+-gerichtet ist. Ist $D \in F_{ult}(A)$ mit $I_\kappa \cap D = \emptyset$ bzw. im zweiten Fall $I_\kappa[Y] \cap D = \emptyset$, dann ist D κ^+-gerichtet, also $\mathrm{cof}(D) > \kappa$ in Widerspruch zur Maximalität von κ.

Qed(24.25).

Da die einzelnen Generatoren paarweise verschieden sind, ergibt sich aus der Existenz von Generatoren, folgende verbesserte Abschätzung:

Corollary 24.26. *Ist $2^{|A|} < \min A$, dann $|\mathrm{pcf}(A)| \leq 2^{|A|}$.*

Corollary 24.27. *Sei $\aleph_\omega$ starker Limes, dann ist $2^{\aleph_\omega} < \aleph_{(2^{\aleph_0})^+}$.*

Betrachte Corollary 24.20 unter Betrachtung der verbesserten Schranke. Dann folgt das Korollar aus Theorem 24.18. Vergleiche hierfür die vorausgegangene Seminararbeit 'pcf

Theorie' von Stefan Knauf, bzw. den entsprechenden Abschnitt in Jech - Set Theory.

Einen kleinen Einblick in die Tragweite der Methode der Generatoren geben folgende, abschließende Konsequenzen.

Corollary 24.28. *Aus $2^{|A|} < \min A$ folgt $\max pcf(A) \in V$.*

Beweis. Angenommen $\mathrm{pcf}(A)$ besäße kein maximales Element. Dann ist $\max \mathrm{pcf}(B_\lambda) = \lambda$ für alle $\lambda \in \mathrm{pcf}(A)$ beschränkt. Es gilt für alle endlichen Teilmengen $\{\, \vartheta_i \mid i = 0, ..., n \,\}$ aus $\mathrm{pcf}(A)$, $\mathrm{pcf}(\bigcup_{i=0}^n B_{\vartheta_i}) = \bigcup_{i=0}^n \mathrm{pcf}(B_{\vartheta_i})$. Damit ist $\max \mathrm{pcf}(\bigcup_{i=0}^n B_{\vartheta_i}) = \max \{\, \vartheta_i \mid i = 0, ..., n \,\}$ in $\mathrm{pcf}(A)$ beschränkt. Wir erhalten $\mathrm{pcf}(A) \neq \mathrm{pcf}(\bigcup_i B_{\vartheta_i})$, also $A \neq \bigcup_i B_{\vartheta_i}$.
Damit besitzt $\{\, A \setminus B_\lambda \mid \lambda \in \mathrm{pcf}(A) \,\}$ die endliche Durchschnittseigenschaft. Also existiert ein Ultrafilter D auf A, der keinen Generator enthält. Dies widerspricht $\mathrm{cof}(D) \in \mathrm{pcf}(A)$ und $G_b(\mathrm{cof}(D))$.

Qed(24.28)

Corollary 24.29. (Kompaktheitseigenschaft) *Sei $(B_\vartheta)_{\vartheta \in pcf(A)}$ System von Generatoren bezgl. A, dann existiert für jedes $X \subset A$ eine endliche Menge $\{\vartheta_i\}_{i=0,\ldots,n} \subset pcf(A)$, so dass X von $(B_{\vartheta_i})_{i=0,\ldots,n}$ überdeckt wird.*

Betrachte $\{\, X \setminus B_\lambda \mid \lambda \in \mathrm{pcf}(A) \,\}$ und folgere in Analogie zu 24.28.

Im weiteren Verwenden wir Theorem 24.16 (Shelah) in folgender Form[9]:

Theorem 24.16 (Shelah). *Sei η eine Kardinalzahl mit $cf(\eta) = \kappa > \aleph_0$. Sei weiter $C \subset \eta$ eine abgeschlossene in η unbeschränkte Menge. Dann hat $\prod_{\alpha \in C} \aleph_{\alpha+1}$ mod I_{NS} wahre Konfinalität $\aleph_{\eta+1}$. Dabei ist I_{NS} das nichtstationäre Ideal.*

Damit ergibt sich nun:

Corollary 24.30. *Sei η eine Kardinalzahl mit $cf(\eta) = \kappa > \aleph_0$. Weiter gelte $2^\kappa < \aleph_\eta$. Insbesondere ist also $\aleph_\eta$ singulär. Dann existiert eine abgeschlossene, in η unbeschränkte Menge $C \subset \eta$, so dass $\max pcf(\{\, \aleph_{\alpha+1} \mid \alpha \in C \,\}) = \aleph_{\eta+1}$, sowie $\prod_{\alpha \in C} \aleph_{\alpha+1}$ mod I wahre Konfinalität $\aleph_{\eta+1}$ hat, mit dem Ideal I aller beschränkten Mengen in η.*

[9] Vergleiche Jech - Set Theory - Theorem 24.16.

Beweis. Wir wählen eine κ-mächtige, abgeschlossene, in η unbeschränkte Menge $C_0 \subset \eta$, so dass mit $a_0 := \min C_0$, $\aleph_{a_0} > 2^\kappa$ gilt[10]. Dann sei $A_0 := \{ \aleph_{\alpha+1} \mid \alpha \in C_0 \}$ die 'hochgeholte' Menge von C_0. Weiter sei D ein Ultrafilter, der alle abgeschlossenen, unbeschränkten Teilmengen von η enthält[11] ,insbesondere also auch C_0. Dann gilt $<_{I_{NS}} \subset <_D$. Und nach Theorem 24.16 erhalten wir somit:
tcf $\prod_{\alpha \in C_0} \aleph_{\alpha+1}/D =$ tcf $\prod_{\alpha \in C_0} \aleph_{\alpha+1}/I_{NS} = \aleph_{\eta+1} =: \lambda$. $\quad (*)$

Mit $D' := D|C_0 \in F_{ult}(C_0)$ also[12] $\mathrm{cof}(\aleph^+(D')) = \lambda$ womit $\lambda \in \mathrm{pcf}(A_0)$ folgt.
Da $|A_0| = |C_0| = \kappa$, erhalten wir $2^{|A_0|} < \min A_0$, nach Wahl von C_0. Somit existieren Generatoren bzgl. A_0. Sei $B_\lambda \subset A_0$ Generator von λ.
Wir holen B_λ 'herunter' auf X , d.h. $X := \{ \alpha \in C_0 \mid \aleph_{\alpha+1} \in B_\lambda \}$. Mit $G_b(\lambda)$ gilt $B_\lambda \in \aleph^+(D')$ und somit $X \in D'$.
Also gibt es ein $C \subset X$, welches abgeschlossen und unbeschränkt in η ist. C holen wir wieder hoch, setzen also $A := \{ \aleph_{\alpha+1} \mid \alpha \in C \}$. Dann ist $A \subset B_\lambda$ und damit $\max \mathrm{pcf}(A) \leq \max \mathrm{pcf}(B_\lambda) \leq \lambda$, nach $G_a(\lambda)$.
Analoge Argumentation zu $(*)$ ergibt $\lambda \in \mathrm{pcf}(A)$. Also insgesamt $\max \mathrm{pcf}(A) = \lambda$.
Da $|C| = \kappa$, existiert ein System von Generatoren $(B_\mu)_{\mu \leq \lambda}$ über $\mathrm{pcf}(A)$. Für jedes $\mu < \lambda$ aus A ist $\max \mathrm{pcf}(B_\mu) = \mu < \aleph_\eta$ und damit ist $B_\mu \subset \mathrm{pcf}(B_\mu)$ in A beschränkt. Also $I_\lambda \subset I$. Nach $G_c(\lambda)$ hat $\prod_{\alpha \in C} \aleph_{\alpha+1}/I$ also einen λ-Scale.

Qed(24.30).

[10] Man überzeuge sich, dass eine solche Menge existiert. Ist $C \subset \eta$ unbeschränkt in η mit $|C| = \kappa$. Dann hat der topologische Abschluss von C in η Mächtigkeit κ.

[11] Auch für singuläre η mit cf $(\eta) > \aleph_o$ erfüllen die abgeschlossenen, in η unbeschränkten Mengen, die endliche Durchschnittseigenschaft. Vergleiche Lemma 8.2 in Jech - Set Theory.

[12] Hierbei sei $\aleph^+$ die Abbildung $\alpha \mapsto \aleph_{\alpha+1}$ und $\aleph^+(D')$, der Bildfilter von D' bezgl. der Bijektion $\aleph^+$, der damit nachweislich die Ultraeigenschaft erhält und damit Ultrafilter auf A_0 ist.