22.6.2009 Vortrag von Stefan Knauf
Stefan.Knauf@Uni-Bonn.de

PCF-Theorie

(Jech, Seiten 466 bis 469)

Die Shelahsche PCF-Theorie ist die Theorie der möglichen Konfinalitäten von Ultraprodukten regulärer Kardinalzahlen. Der Name PCF-Theorie kommt von englisch *possible cofinalities*. Wir setzen das Axiomensystem ZFC voraus.

Definition: Sei A Menge von Kardinalzahlen. Als Konfinalität eines Ultrafilters D bezeichnen wir die Konfinalität des Ultraproduktes, also

$$\mathrm{cf}\, D := \mathrm{cf} \prod A/D = \mathrm{cf}((\prod_{a \in A} a)/ =_D)$$

bzgl. $<_D$, wobei $g <_D f :\leftrightarrow \{a \in A \mid g(a) < f(a)\} \in D$ für $g, f \in \prod_{a \in A} a$.

Definition 24.17: Sei A eine Menge regulärer Kardinalzahlen. Wir definieren:

$$\mathrm{pcf}\, A := \{\mathrm{cf}\, D \mid D \text{ ist Ultrafilter von } A\}$$

Bemerkung: Ultraprodukte linearer Ordnungen sind bzgl. $<_D$ linear geordnet.

Ziel dieses Vortrages ist es, folgenden Satz zu beweisen:

Satz 24.18 (Shelah): Wenn $\aleph_\omega$ starke Limeskardinalzahl ist, dann gilt:

$$\max(\mathrm{pcf}\{\aleph_n\}_{n<\omega}) = 2^{\aleph_\omega}$$

Bemerkung: Es gilt bereits $\max(\mathrm{pcf}\{\aleph_n\}_{n<\omega}) = \aleph_\omega^{\aleph_0}$, wenn $2^{\aleph_0} < \aleph_\omega$ ist.

Ohne Beweis; Jech verweist auf „Shelah's pcf theory and its applications" von Burke und Magidor, 1990.

Bemerkungen:

1. $\operatorname{pcf} A$ ist Menge regulärer Kardinalzahlen.
2. $A \subseteq \operatorname{pcf} A$
3. $|\operatorname{pcf} A| \leq 2^{2^{|A|}}$
4. $A \subseteq B \quad \rightarrow \quad \operatorname{pcf} A \subseteq \operatorname{pcf} B$
5. $\operatorname{pcf}(A \cup B) = \operatorname{pcf}(A) \cup \operatorname{pcf}(B)$

Beweise:

1. Klar, weil Konfinalitäten linearer Ordnungen reguläre Kardinalzahlen sind.
2. Zu jedem $a \in A$ hat das Ultraprodukt des prinzipalen Ultrafilters, der $\{a\}$ enthält, die Konfinalität $\operatorname{cf} a = a$.
3. $|\operatorname{pcf} A| \leq |\{D \mid D \text{ ist Ultrafilter auf } A\}| \leq |\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(A))| = 2^{2^{|A|}}$
4. Sei $a \in \operatorname{pcf} A$. Dann gibt es einen Ultrafilter U auf A mit $\operatorname{cf} U = a$. Sei $D := \{m \subseteq B \mid \exists x{\in}U : x \subseteq m\}$. D ist Ultrafilter von B mit Konfinalität $\operatorname{cf} D = \operatorname{cf} U$. Folglich ist $a \in \operatorname{pcf} B$.
5. $\operatorname{pcf}(A \cup B) \supseteq \operatorname{pcf}(A) \cup \operatorname{pcf}(B)$ gilt wegen 4.
   Für $\operatorname{pcf}(A \cup B) \subseteq \operatorname{pcf} A \cup \operatorname{pcf} B$ betrachte Folgendes: Sei $a \in \operatorname{pcf}(A \cup B)$ und U ein Ultrafilter von $A \cup B$ mit $\operatorname{cf} U = a$. Dann ist A oder B Element von U (denn wären beide nicht drin, wären sowohl A^C als auch B^C Elemente von U und damit auch $A^C \cap B^C = (A \cup B)^C = \emptyset \in U$, was ein Widerspruch wäre). Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $A \in U$. Sei $D := \{m \subseteq A \mid \exists x{\in}U : x \cap A = m\} \subseteq U$. D ist Ultrafilter von A. Es gilt $f <_U g \quad \leftrightarrow \quad f \restriction A <_D g \restriction A$ und folglich auch $a = \operatorname{cf} U = \operatorname{cf} D \in \operatorname{pcf} A$.

$\square$

Definition: Eine Menge A regulärer Kardinalzahlen, die alle regulären Kardinalzahlen λ mit $\min A \leq \lambda < \sup A$ enthält, heißt Intervall regulärer Kardinalzahlen.

Lemma 24.19: Sei A ein Intervall regulärer Kardinalzahlen mit $\min A = (2^{|A|})^+$. Dann ist $\operatorname{pcf} A$ ein Intervall regulärer Kardinalzahlen.

Beweis: Wir müssen zeigen, dass zu jedem Utrafilter D von A jede reguläre Kardinalzahl λ mit $\min A \leq \lambda < \operatorname{cf} D$ wieder Element von $\operatorname{pcf} A$ ist. Dazu konstruieren wir einen Ultrafilter E mit $\operatorname{cf} E = \lambda$.
Sei $F = \langle f_\alpha \mid \alpha < \lambda \rangle$ eine D-aufsteigende Folge in $\prod_{a \in A} a$. Da $\lambda < \operatorname{cf} D$ ist, hat F eine obere Schranke bzgl. $\leq_D$. Da λ regulär ist und $\lambda > 2^{|A|}$ gilt, hat F bzgl. $\leq_D$ nach Lemma 24.10 (Lemma 1 aus Mariannes Vortrag) auch eine kleinste obere Schranke f. Für jedes $a \in A$ sei $h(a) := \operatorname{cf}(f(a))$ und S_a eine in $f(a)$ konfinale Menge vom Ordnungstyp $h(a)$. $(\prod_{a \in A} S_a)/D$ hat mit $\langle \min(S_a \setminus f_\alpha(a)) \mid \alpha < \lambda \rangle$ eine konfinale λ-Folge. Folglich hat auch $(\prod_{a \in A} h(a))/D$ eine konfinale λ-Folge $\langle h_\alpha \mid \alpha < \lambda \rangle$.
Die Menge $\{a \in A \mid h(a) > 2^{|A|}\}$ liegt in D (Angenommen nicht, dann wäre $m := \{a \in A \mid h(a) \leq 2^{|A|}\} \in D$. $|\prod_{a \in m} h(a)| \leq |{}^A(2^{|A|})| = (2^{|A|})^{|A|} = 2^{|A|} < \lambda$. Folglich kann man auf m weniger als λ viele Funktionen unterscheiden. Da zwei Funktionen, die auf m gleich sind, bzgl. $=_D$ in derselben Äquivalenzklasse lägen, gäbe es dann auch weniger als λ viele Objekte im Ultraprodukt. Das widerspräche der Tatsache, dass die Konfinalität des Ultraproduktes $\operatorname{cf} D > \lambda$ ist.).
Weil A ein Intervall ist, gilt $\{a \in A \mid h(a) > 2^{|A|}\} = \{a \in A \mid h(a) \in A\}$.
Sei $E := \{X \subseteq A \mid h^{-1}(X) \in D\}$. E ist Ultrafilter von A.
Sei $\langle g_\alpha \mid \alpha < \operatorname{cf} E \rangle$ E-aufsteigende und -konfinale Folge in $\prod_{a \in A} a$. Es gilt:

$$\begin{aligned} & g_\alpha <_E g_\beta \leftrightarrow \{a \in A \mid g_\alpha(a) < g_\beta(a)\} \in E \\ \leftrightarrow \quad & h^{-1}\{a \in A \mid g_\alpha(a) < g_\beta(a)\} \in D \\ \leftrightarrow \quad & \{a \in A \mid h(a) \in A \ \wedge \ g_\alpha(h(a)) < g_\beta(h(a))\} \in D \end{aligned}$$

Folglich ist die Folge $\langle l_\alpha \mid \alpha < \operatorname{cf} E \rangle$ mit

$$l_\alpha(a) := \begin{cases} g_\alpha(h(a)), & \text{falls } h(a) \in A \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

D-aufsteigend. Da $g_\alpha(a) \in a$ für alle $a \in A$ gilt, verlaufen die l_α in $\prod_{a \in A} h(a)$. Somit folgt $\operatorname{cf} E \leq \lambda$, weil $\operatorname{cf} E$ reguläre Kardinalzahl ist.
Seien g_α für $\alpha < \lambda$ so, dass $\langle g_\alpha \circ h \mid \alpha < \lambda \rangle$ bzgl. D aufsteigend und konfinal

in $\prod_{a\in A} h(a)$ ist.

$$\begin{aligned}
& g_\alpha \circ h <_D g_\beta \circ h \;\leftrightarrow\; \{a \in A \mid g_\alpha \circ h(a) < g_\beta \circ h(a)\} \in D \\
\rightarrow\;& \{a \in A \mid g_\alpha \circ h(a) < g_\beta \circ h(a)\} \cap \{a \in A \mid h(a) > 2^{|A|}\} \in D \\
\leftrightarrow\;& \{h(a) \mid g_\alpha(h(a)) < g_\beta(h(a))\} \cap \{h(a) \mid h(a) > 2^{|A|}\} \\
& = \{h(a) \mid g_\alpha(h(a)) < g_\beta(h(a))\} \cap A \in E \\
\rightarrow\;& g_\alpha \restriction A <_E g_\beta \restriction A
\end{aligned}$$

Folglich ist $\langle g_\alpha \restriction A \mid \alpha < \lambda\rangle$ eine E-aufsteigende λ-Folge und somit cf $E \geq \lambda$ (weil λ reguläre Kardinalzahl ist). Zusammen mit Ebigem gilt cf $E = \lambda$. $\square$

Korollar 24.20: Wenn $\aleph_\omega$ starke Limeskardinalzahl ist, dann ist $\mathrm{pcf}\{\aleph_n\}_{n<\omega}$ ein Intervall und $\sup(\mathrm{pcf}\{\aleph_n\}_{n<\omega}) < \aleph_{\aleph_\omega}$.

Beweis: $\mathrm{pcf}\{\aleph_n\}_{n<\omega}$ ist Intervall: Es gilt $\mathrm{pcf}\{\aleph_n\}_{n<\omega} = \mathrm{pcf}([\aleph_0, 2^{\aleph_0}] \cup [(2^{\aleph_0})^+, \aleph_\omega[) = \mathrm{pcf}([\aleph_0, 2^{\aleph_0}]) \cup \mathrm{pcf}([(2^{\aleph_0})^+, \aleph_\omega[)$.
Es gelten $\sup(\mathrm{pcf}([\aleph_0, 2^{\aleph_0}])) \leq |\prod_{a\in[\aleph_0,2^{\aleph_0}]} a| = 2^{\aleph_0}$ und $[\aleph_0, 2^{\aleph_0}] \subseteq \mathrm{pcf}([\aleph_0, 2^{\aleph_0}])$. Folglich gilt $\mathrm{pcf}([\aleph_0, 2^{\aleph_0}]) = [\aleph_0, 2^{\aleph_0}]$.
$\mathrm{pcf}([(2^{\aleph_0})^+, \aleph_\omega[)$ ist nach Lemma 24.19 ein Intervall. Also ist $\mathrm{pcf}\{\aleph_n\}_{n<\omega}$ ein Intervall.
$\sup(\mathrm{pcf}\{\aleph_n\}_{n<\omega}) < \aleph_{\aleph_\omega}$: $|\mathrm{pcf}\{\aleph_n\}_{n<\omega}| \leq 2^{2^{|\{\aleph_n\}_{n<\omega}|}} < \aleph_\omega$ und es gibt schon $\aleph_\omega$ viele Nachfolgerkardinalzahlen vor $\aleph_{\aleph_\omega}$, also muss das Intervall $\mathrm{pcf}\{\aleph_n\}_{n<\omega}$ schon vor $\aleph_{\aleph_\omega}$ aufhören. Damit gilt $\sup(\mathrm{pcf}\{\aleph_n\}_{n<\omega}) < \aleph_{\aleph_\omega}$. $\square$

Definition: Im Folgenden sei $\lambda := \sup(\mathrm{pcf}\{\aleph_n\}_{n<\omega})$.

Lemma 24.21: Wenn $\aleph_\omega$ starke Limeskardinalzahl ist, gibt es eine Familie F von Funktionen in $\prod_{n<\omega} \aleph_n$ mit $|F| = \lambda$, so dass für jedes $g \in \prod_{n<\omega} \aleph_n$ ein $f \in F$ existiert, das $g(n) \leq f(n)$ für jedes $n \in \omega$ erfüllt.

Beweis: Wähle für jeden Ultrafilter D auf ω eine D-konfinale Folge $\langle f^D_\alpha \mid \alpha < \mathrm{cf}\, D\rangle$. Sei F die Menge aller f der Form, dass endlich viele $f^{D_i}_{\alpha_i}$ existieren, so dass für alle $n \in \omega$ gilt: $f(n) = \max\{f^{D_1}_{\alpha_1}(n), \dots, f^{D_m}_{\alpha_m}(n)\}$.
F hat Kardinalität λ, weil $\lambda \leq |F| \leq \sum_{i<\omega} |[\lambda \cdot 2^{2^{\aleph_0}}]^i| = \omega \cdot \lambda \cdot 2^{2^{\aleph_0}} = \lambda$, weil $\lambda \geq \aleph_\omega > 2^{2^{\aleph_0}}$.
Angenommen, F hätte nicht die gewünschte Eigenschaft. Dann gäbe es

ein $g \in \prod_{n<\omega} \aleph_\omega$, so dass für alle $f \in F$ ein $n \in \omega$ mit $f(n) < g(n)$ existierte. Sei für jeden Ultrafilter D und jedes $\alpha < \operatorname{cf} D$ die Menge $X_\alpha^D := \{n \mid f_\alpha^D(n) < g(n)\}$. Dann hätte die Menge $\{X_\alpha^D\}_{D,\alpha}$ die endliche Durchschnittseigenschaft (d.h., der Schnitt endlich vieler X_α^D wäre nicht leer). Also ließe sich $\{X_\alpha^D\}_{D,\alpha}$ zu einem Ultrafilter U erweitern. Allerdings wäre $g >_U f$ für jedes $f \in F$. Da per Konstruktion eine U-konfinale Folge in F liegt, wäre das ein Widerspruch. □

Konstruktion: Sei F eine feste Familie wie im Lemma und $\aleph_\omega$ starke Limeskardinalzahl. Sei $k < \omega$ mit $2^{\aleph_0} \leq \aleph_k$ und $\lambda < \aleph_{\aleph_k}$ (dieses k existiert, weil nach Korollar 24.20 $\lambda < \aleph_{\aleph_\omega}$ ist). Sei $\vartheta \in Card$ regulär und so groß, dass $\prod_{n<\omega} \aleph_n \in H_\vartheta = \{Y \mid |\operatorname{Tc}(Y)| < \vartheta\}$ ist. Wir betrachten elemantare Untermodelle von $(H_\vartheta, \in, \prec)$, wobei $\prec$ eine Wohlordnung von H_ϑ ist. Analog zu Lemma 4.1 aus Veronikas Vortrag konstruieren wir für jede abzählbare Teilmenge $x \subset \aleph_\omega$ eine elementare Kette $\langle M_\alpha^x \mid \alpha < \omega_k \rangle$, die für alle $\alpha < \omega_k = \aleph_k$ erfüllt: $|M_\alpha^x| = \aleph_k$ und $M_\alpha^x \supseteq x \cup \omega_k$.
Wir wählen M_0^x als Untermodell von $(H_\vartheta, \in, \prec)$ mit $|M_0^x| = \aleph_k$ und $M_0^k \supseteq x \cup \omega_k$. Für gegebene M_α^x definieren wir die charakteristische Funktion:

$$\chi_\alpha^x(n) := \sup(M_\alpha^x \cap \omega_n) \qquad \text{(für alle } n > k).$$

Es gibt eine Funktion $f_\alpha^x \in F$ mit $f_\alpha^x(n) \geq \chi_\alpha^x(n)$ für alle $n > k$. Wir wählen $M_{\alpha+1}^x$ als elementares Obermodell von M_α^x mit $f_\alpha^x, \chi_\alpha^x, M_\alpha^x \in M_{\alpha+1}^x$. Wenn α Limesordinalzahl ist, setzen wir $M_\alpha^x := \bigcup_{\beta<\alpha} M_\beta^x$.
Wir definieren $M^x := \bigcup_{\alpha<\omega_k} M_\alpha^x$ und seine charakteristische Funktion

$$\chi^x(n) := \sup(M^x \cap \omega_n) \qquad \text{(für alle } n > k).$$

Diese Konstruktion der unendlich vielen unendlichen Modellketten hat den Nutzen, dass wir im Folgenden von der Menge der charakteristischen Funktionen zeigen können, dass sie $2^{\aleph_\omega} = |\{\chi^x \mid x \in [\aleph_\omega]^{\aleph_0}\}| \leq \lambda$ erfüllt.

Lemma 24.22: Es gelten die obigen Voraussetzungen. Wenn x und y abzählbare Teilmengen von $\aleph_\omega$ sind und $\chi^x = \chi^y$ gilt, dann auch $M^x \cap \aleph_\omega = M^y \cap \aleph_\omega$.

Beweis: Wir zeigen per Induktion über n, dass für alle n mit $k \leq n < \omega$ gilt: $M^x \cap \aleph_n = M^y \cap \aleph_n$. Für $n = k$ ist wegen $M^x, M^y \supseteq \aleph_k$ der Schnitt

$M^x \cap \aleph_k = M^y \cap \aleph_k = \aleph_k$. Angenommen, die Aussage gilt für n. Laut Voraussetzung gilt $\chi^x(n+1) = \chi^y(n+1)$. Weiter gilt:

$$\begin{aligned}\chi^x(n+1) &= \sup(M^x \cap \omega_{n+1}) = \sup((\bigcup_{\alpha<\omega_k} M^x_\alpha) \cap \omega_{n+1}) \\ &= \sup(\bigcup_{\alpha<\omega_k} (M^x_\alpha \cap \omega_{n+1})) = \bigcup_{\alpha<\omega_k} \sup(M^x_\alpha \cap \omega_{n+1}) \\ &= \bigcup_{\alpha<\omega_k} (\chi^x_\alpha(n+1))\end{aligned}$$

Folglich besitzt $\chi^x(n+1)$ die abgeschlossene, unbeschränkte Teilmenge $\{\chi^x_\alpha(n+1)\}_{\alpha<\omega_k} \subseteq M^x \cap \aleph_{n+1}$. ($\{\chi^x_\alpha(n+1)\}_{\alpha<\omega_k} \subseteq M^x$, weil $\chi^x_\alpha \in M^x$ und es ein elementares Untermodell von H_ϑ ist.) Analog hat $\chi^y(n+1)$ die abgeschlossene, unbeschränkte Teilmenge $\{\chi^y_\alpha(n+1)\}_{\alpha<\omega_k} \subseteq M^y \cap \aleph_{n+1}$. Da der Schnitt zweier abgeschlossener, unbeschränkter Mengen wieder abgeschlossen und unbeschränkt ist, gibt es eine in $\chi^x(n+1) = \sup(M^x \cap \omega_{n+1})$ konfinale Menge $K \subseteq M^x \cap M^y$. Für jede Ordinalzahl $\gamma \in K$ mit $\gamma \geq \omega_n$ gibt es eine Bijektion $\pi : \omega_n \leftrightarrow \gamma$. Wenn wir π $\prec$-minimal aussuchen, ist $\pi \in M^x \cap M^y$, weil π der Formel

$$\varphi(\pi, \gamma, \omega_n) = (\pi : \omega_n \leftrightarrow \gamma \ \wedge \ \forall f : \omega_n \leftrightarrow \gamma \quad (\pi \preccurlyeq f))$$

genügt und $(M^x, \in, \prec)$ und $(M^y, \in, \prec)$ elementare Untermodelle von $(H_\vartheta, \in, \prec)$ sind. Nach Induktionsannahme gilt $M^x \cap \omega_n = M^y \cap \omega_n$, folglich gilt $\pi[M^x \cap \omega_n] = \pi[M^x \cap \omega_n] \subseteq M^x \cap M^y$ und somit $M^x \cap \gamma = M^y \cap \gamma$. Damit folgt $M^x \cap \aleph_{n+1} = M^y \cap \aleph_{n+1}$. □

Lemma 24.23: Unter den Voraussetzungen von eben gibt es eine Familie F_λ von $\aleph_k$ großen Teilmengen von λ mit $|F_\lambda| = \lambda$, so dass für jede Teilmenge $Z \subset \lambda$ der Größe $\aleph_k$ eine Menge $X \in F_\lambda$ mit $X \subseteq Z$ existiert.

Beweis: Wir zeigen mit Induktion über α, dass für alle Ordinalzahlen α mit $2^{\aleph_k} \leq \alpha \leq \lambda$ eine Familie F_α mit $|F_\alpha| = |\alpha|$ existiert, die für alle Teilmengen $Z \subset \alpha$ der Größe $\aleph_k$ eine Menge X der Größe $\aleph_k$ mit $X \subseteq Z$ enthält. Für $\alpha = 2^{\aleph_k}$ taugt $F_\alpha = [\alpha]^{\aleph_k}$. Für alle nichtkardinalen Ordinalzahlen α lässt sich die Aussage auf ihre Gültigkeit für $|\alpha|$ zurückführen, weil es zwischen ihnen eine Mengenbijektion gibt. Es bleibt, die Aussage für Kardinalzahlen α zu zeigen. Weil $\lambda < \aleph_{\aleph_k}$ gilt, haben alle Limeskardinalzahlen $\alpha \leq \lambda$ Konfinalität kleiner $\aleph_k$, alle anderen Kardinalzahlen sind regulär und größer als $\aleph_k$, also gilt $\operatorname{cf}(\alpha) \neq \aleph_k$. Da $\aleph_k$ regulär ist, kann eine $\aleph_k$ lange Folge nicht konfinal in einer Zahl mit Konfinalität ungleich $\aleph_k$ sein. Folglich ist jede $\aleph_k$ große Teilmenge von α schon Teilmenge einer kleineren Ordinalzahl. Also taugt $F_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} F_\beta$. $\square$

So, und nun zum finalen Beweis:

Satz 24.18 (Shelah): Wenn $\aleph_\omega$ starke Limeskardinalzahl ist, dann gilt:

$$\max(\operatorname{pcf}\{\aleph_n\}_{n<\omega}) = 2^{\aleph_\omega}$$

Beweis: Es gilt für jeden Ultrafilter D auf $\{\aleph_n\}_{n<\omega}$:

$$\operatorname{cf} D \leq |\prod_{n<\omega} \aleph_n| \leq \aleph_\omega^{\aleph_0} = 2^{\aleph_\omega}$$

weil für starke Limeskardinalzahlen κ gilt: $2^\kappa = \kappa^{\operatorname{cf}\kappa}$. Folglich ist $\lambda = \sup(\operatorname{pcf}\{\aleph_n\}_{n<\omega}) \leq 2^{\aleph_\omega}$. Wir betrachten nun die Konstruktion von Seite 5. Es gilt:

$$\chi^x(n) = \sup_{\alpha<\omega_k} \chi^x_\alpha(n) = \sup_{\alpha<\omega_k} f^x_\alpha(n)$$

Und damit auch für jede $\aleph_k$ große Teilmenge S von ω_k:

$$\chi^x(n) = \sup_{\alpha\in S} \chi^x_\alpha(n) = \sup_{\alpha\in S} f^x_\alpha(n)$$

Da die Menge F Kardinalität λ hat, lässt sich Lemma 24.23 auf F anwenden. Damit existiert eine λ große Menge F_λ von $\aleph_k$ großen Teilmengen von F, so dass für jede $\aleph_k$ große Teilmenge Z von F eine Menge $X \in F_\lambda$ mit $X \subseteq Z$ existiert. Da jedes χ^x durch eine $\aleph_k$ große Teilmenge Z^x von F eindeutig bestimmt ist und mehrere Z^x das gleiche χ^x bestimmen, falls sie eine gemeinsame $\aleph_k$ große Untermenge enthalten, gibt es also höchstens λ viele χ^x. Damit gilt $|\{\chi^x \mid x \in [\aleph_\omega]^{\aleph_0}\}| \leq \lambda$. Weiter gilt:

$$\begin{aligned} 2^{\aleph_\omega} &= \aleph_\omega^{\aleph_0} = |[\aleph_\omega]^{\aleph_0}| = |\bigcup_{x\in[\aleph_\omega]^{\aleph_0}} [M^x \cap \aleph_\omega]^{\aleph_0}| \\ &\leq |\{\chi^x \mid x \in [\aleph_\omega]^{\aleph_0}\}| \cdot \aleph_k^{\aleph_0} \quad \text{wegen Lemma 24.22} \\ &\leq |[\aleph_\omega]^{\aleph_0}| \cdot \aleph_k^{\aleph_0} = \aleph_\omega^{\aleph_0} = 2^{\aleph_\omega} \end{aligned}$$

Daraus folgt $|\{\chi^x \mid x \in [\aleph_\omega]^{\aleph_0}\}| = 2^{\aleph_\omega}$. Insgesamt gilt damit

$$2^{\aleph_\omega} = |\{\chi^x \mid x \in [\aleph_\omega]^{\aleph_0}\}| \leq \lambda \leq 2^{\aleph_\omega}$$

und endlich $\lambda = \sup(\mathrm{pcf}\{\aleph_n\}_{n<\omega}) = 2^{\aleph_\omega}$.
Jetzt muss nur noch gezeigt werden, dass das Supremum auch angenommen wird. Dafür zeigen wir, dass $\lambda = 2^{\aleph_\omega}$ Nachfolgerkardinalzahl ist. Nach Wahl von k gilt $\lambda < \aleph_{\aleph_k}$; also falls λ Limeskardinalzahl ist, gilt $\mathrm{cf}(\lambda) < \aleph_k$. Wir wissen aber nach einem Korollar des Satzes von König, dass $\mathrm{cf}(2^{\aleph_\omega}) > \aleph_\omega$ ist. Damit muss λ Nachfolgerkardinalzahl sein und wird damit als Maximum auch angenommen. $\square$