Ordinalzahlfunktionen und Scales II

Marianne Wilms

9. Juni 2009

Sei, wie im ersten Teil des Vortrages, A eine unendliche Menge und I ein Ideal auf A.

Lemma 1. *Wenn $\lambda > 2^{|A|}$ eine reguläre Kardinalzahl ist, dann hat jede $<_I$-aufsteigende λ-Folge von Ordinalzahlfunktionen auf A eine exakte obere Schranke.*

Beweis. Sei $F = \langle f_\alpha | \alpha < \lambda \rangle$ eine $<_I$-aufsteigende λ-Folge. Sei M ein elementares H_θ-Untermodell für ein genügend großes θ, sodass $I \in M$, $F \in M$, $|M| = 2^{|A|}$ und $M^{|A|} \subset M$ gelten. Sei für jedes α

$$g_\alpha(a) \quad \text{das kleinste } \beta \in M \text{, sodass } \beta \geq f_\alpha(a) \qquad (a \in A).$$

Wegen $M^{|A|} \subset M$ gilt $g_\alpha \in M$, und wegen $|M| < \lambda$ gibt es ein $f \in M$ mit $f = g_\alpha$ für λ-viele α's. Die Menge X dieser α's ist konfinal in λ, daher finden wir für $\gamma \notin X$ ein $\alpha \in X$ sodass $f_\gamma \leq_I f_\alpha \leq_I f$ gilt; folglich ist f eine obere Schranke von F.

Müssen noch zeigen: f ist eine exakte obere Schranke. Um zu zeigen, dass stets aus $h <_I f$ bereits $h <_I f_\alpha$ für ein α folgt, reicht es aus, $h \in M$ zu betrachten, da M als elementares H_θ-Untermodell gewählt war. Sei also $h \in M$ mit $h <_I f$.

Sei α beliebig mit $f = g_\alpha$. Für jedes $a \in A$ mit $h(a) < g_\alpha(a)$ gilt $h(a) < f_\alpha(a)$, denn es ist $h(a) \in M$, und nach Definition ist $g_\alpha(a)$ das kleinste $\beta \in M$ mit $\beta \geq f_\alpha(a)$. Also gilt bereits $h <_I f_\alpha$. ☺

Erinnerung 1. Für eine partiell geordnete Menge $(P, <)$ heißt eine Teilmenge $A \subset P$ konfinal in $(P, <)$, wenn für jedes $p \in P$ ein $a \in A$ existiert, sodass gilt: $p \leq a$.

Die Konfinalität von $(P, <)$ ist die minimale Größe einer konfinalen Menge, und die wahre Konfinalität ist die kleinste Kardinalität einer konfinalen Kette (d. h. einer linear geordneten konfinalen Menge), sofern diese existiert.

Definition 1. Wenn F eine Menge von Ordinalzahlfunktionen auf A ist, und g eine obere Schranke von F, dann nennen wir F unterhalb von g beschränkt, falls es eine obere Schranke h besitzt mit $h <_I g$. Wir nennen F konfinal in g, wenn es konfinal in $\prod_{a \in A} g(a)$ ist.

Notation: Für $X \notin I, X \subset A$ schreiben wir kurz: $X \in I^+$.

Für $X \in I^+$ bedeute $f <_I g$ auf X, dass $f <_{I \upharpoonright X} g$ gelte, wobei $I \upharpoonright X$ das von $I \cup A \setminus X$ erzeugte Ideal ist.

Korollar 1. *Wenn $\lambda > 2^{|A|}$ regulär ist, $F = \langle f_\alpha | \alpha < \lambda \rangle$ $<_I$-aufsteigend und g eine obere Schranke von F ist, dann ist entweder F unterhalb von g beschränkt, oder F ist konfinal in g, oder es gilt $A = X \cup Y$, wobei $X, Y \in I^+$ derart sind, dass F auf X unterhalb von g beschränkt ist und auf Y konfinal in g ist.*

Beweis. Nach Lemma 1 existiert eine exakte obere Schranke f von F auf A. Betrachte nun $Y = \{a \in A | f(a) \geq g(a)\}$.

Fall 1: $Y \in I$. Damit gilt $f <_I g$, also ist F nach Definition unterhalb von g beschränkt (mit $h = f$).

Fall 2: $Y \notin I$. Betrachte nun $X = \{a \in A | f(a) < g(a)\}$. Entweder gilt $X \in I$. Dies bedeutet $g \leq_I f$, und damit ist F konfinal in g, da f eine exakte obere Schranke von F ist. Oder es gilt $X \notin I$. Dann haben wir aber die gesuchte Zerlegung von A in $X \cup Y$ mit $X, Y \in I^+$ gefunden. ☺

Erinnerung 2. Ein Scale in $\prod_{a \in A} \gamma_a$ ist eine bezüglich $<_I$ wachsende transfinite Folge $\langle f_\alpha | \alpha < \lambda \rangle$ von Funktionen in $\prod_{a \in A} \gamma_a$, die in $(\prod_{a \in A} \gamma_a, <_I)$ konfinal sind.

$\prod_{a \in A} \gamma_a$ heißt λ-gerichtet, wenn jede Teilmenge $B \subset \prod_{a \in A} \gamma_a$ der Größe $< \lambda$ eine obere Schranke hat.

Korollar 2. *Sei $\lambda > 2^{|A|}$ eine reguläre Kardinalzahl, seien γ_a für $a \in A$ Limesordinalzahlen, sodass $\prod_{a \in A} \gamma_a$ λ-gerichtet in $<_I$ sei. Dann ist entweder $\prod_{a \in A} \gamma_a$ auch λ^+-gerichtet, oder es besitzt einen λ-Scale, oder es gilt $A = X \cup Y$, wobei $X, Y \in I^+$ derart sind, dass $\prod_{a \in A} \gamma_a$ einen λ-Scale auf X besitzt und auf Y λ^+-gerichtet ist.*

Beweis. Angenommen, $\prod_{a \in A} \gamma_a$ sei λ-gerichtet, aber nicht λ^+-gerichtet. Sei nun $S \subset \prod_{a \in A} \gamma_a$ unbeschränkt mit $|S| = \lambda$. Weil $\prod_{a \in A} \gamma_a$ λ-gerichtet ist, können wir eine Folge $F = \langle f_\alpha | \alpha < \lambda \rangle$ konstruieren, sodass für jedes $f \in S$ ein $\alpha < \lambda$ existiert mit $f <_I f_\alpha$. Wegen $|F| = \lambda$ und $F \subset \prod_{a \in A} \gamma_a$ λ ist F unbeschränkt, und wegen der λ-Gerichtetheit aufsteigend.

Nun ist entweder F ein Scale, oder es gilt $A = X \cup Y$, sodass F auf X beschränkt ist und auf Y konfinal ist. Müssen noch zeigen: $\prod_{a \in A} \gamma_a$ ist λ^+-gerichtet. Dies bedeutet aber nur, dass jede Menge der Größe λ auf X beschränkt ist. Wäre dies nicht der Fall, könnten wir obiges Argument wiederholen, um eine Teilmenge $Z \subset X$ zu finden, die einen Scale besitzt. Das widerspräche aber der Beschränktheit von S auf X. ☺

Definition 2. Für eine reguläre Kardinalzahl λ sei $F = \langle f_\alpha | \alpha < \lambda \rangle$ eine $<_I$-aufsteigende Folge von Ordinalzahlfunktionen auf A, und $\gamma < \lambda$ sei regulär und überabzählbar. Dann heißt F γ-schnell, wenn es für jedes β mit Konfinalität γ, $\beta < \lambda$, eine abgeschlossene, unbeschränkte Teilmenge $C \subset \beta$ gibt, sodass für jede Limesordinalzahl $\alpha < \beta$ gilt: $f_\alpha >_I s_{C \cap \alpha}$, wobei $s_{C \cap \alpha}$ das punktweise Supremum von $\{f_\xi(a) | \xi \in C \cap \alpha\}$ sei:

$$s_{C \cap \alpha}(a) = \sup\{f_\xi(a) | \xi \in C \cap \alpha\} \qquad (a \in A)$$

Lemma 2. *Sei $F = \langle f_\alpha | \alpha < \lambda \rangle$ γ-schnell mit $\gamma > |A|$. Sei für jedes $a \in A$ $S_a \subset \lambda$ so, dass $|S_a| < \gamma$. Dann gibt es ein $\alpha < \lambda$ mit der Eigenschaft, dass für jedes $h \in \prod_{a \in A} S_a$ gilt: Wenn $h >_I f_\alpha$, dann ist h eine obere Schranke von F.*

Beweis. Beweis durch Widerspruch: Angenommen, für jedes $\alpha < \lambda$ existiert ein $h \in \prod_{a \in A} S_a$, sodass $h >_I f_\alpha$ gilt, aber h keine obere Schranke von F ist. Dann konstruieren wir induktiv eine stetige, aufsteigende Folge α_ξ, $\xi < \gamma$, sowie Funktionen $h_\xi \in \prod_{a \in A} S_a$ sodass für alle ξ gilt: $f_{\alpha_\xi} <_I h_\xi$ und $f_{\alpha_{\xi+1}} \not\leq_I h_\xi$. Sei nun $\beta = \lim_{\xi \to \gamma} \alpha_\xi$. Da F γ-schnell ist, gibt es ein abgeschlossenes, unbeschränktes $C \subset \beta$ mit der Eigenschaft, dass für jedes $\alpha \in C$ $f_\alpha >_I s_{C \cap \alpha}$ gilt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass für jedes $\xi < \gamma$ $\alpha_\xi \in C$ gilt (ansonsten ersetzen wir $\{\alpha_\xi\}_{\xi < \gamma}$ durch ihren Schnitt mit C; dies funktioniert, da die Folge der α_ξ stetig war). Da für jedes $\xi < \gamma$

$$s_{C \cap \alpha_\xi} <_I f_{\alpha_\xi} <_I h_\xi \not\geq_I f_{\alpha_{\xi+1}}$$

gilt, existiert ein $a_\xi \in A$ mit

$$s_{C \cap \alpha_\xi}(a_\xi) < f_{\alpha_\xi}(a_\xi) < h_\xi(a_\xi) < f_{\alpha_{\xi+1}}(a_\xi).$$

Da $\gamma > |A|$, gibt es eine Teilmenge $Z \subset \gamma$ der Größe γ, und ein $a \in A$ mit $a_\xi = a$ für alle $\xi \in Z$. Seien nun $\xi, \eta \in Z$ mit $\xi + 1 < \eta$, dann gilt $\alpha_{\xi+1} \in C \cap \alpha_\eta$, und wir erhalten

$$h_\xi(a) < f_{\alpha_{\xi+1}}(a) \leq s_{C \cap \alpha_\eta}(a) < h_\eta(a).$$

Dies ist ein Widerspruch, da $|S_a| < \gamma$ gilt, aber $|Z| = \gamma$ ist. ☺

Korollar 3. *Wenn $F = \langle f_\alpha | \alpha < \lambda \rangle$ γ-schnell ist mit $|A| < \gamma < \lambda$, und f die kleinste obere Schranke von F ist, dann gilt* $\mathrm{cf}\, f(a) \geq \gamma$ *für (bezüglich I) fast alle $a \in A$.*

Beweis. Sei f eine obere Schranke von F, und nehmen wir an, dass $B = \{a \in A | \mathrm{cf}\, f(a) < \gamma\} \in I^+$. Wir suchen nun eine obere Schranke h von F sodass $h <_I f$ auf B gilt.

Für $a \in B$ sei S_a eine konfinale Teilmenge von $f(a)$ der Größe $< \gamma$. Nach Lemma 2 existiert ein $\alpha < \lambda$, sodass für jedes $h \in \prod_{a \in B} S_a$ aus $h >_I f_\alpha$ auf B bereits folgt, dass h eine obere Schranke von F auf B ist. Betrachte für dieses α folgende Funktion $h \in \prod_{a \in B} S_a$: Falls $f_\alpha(a) < f(a)$, sei $h(a) \in S_a$ so, dass $f_\alpha(a) < h(a) < f(a)$. Diese Funktion h ist eine obere Schranke von F auf B, und es gilt $h <_I f$ auf B. ☺

Satz (Shelah). *Sei κ eine reguläre, überabzählbare Kardinalzahl, und sei $I = I_{NS}$ das nichtstationäre Ideal auf κ. Sei $\langle \eta_\xi | \xi < \kappa \rangle$ eine stetige, aufsteigende Folge mit Limes η. Dann hat $\prod_{\xi < \kappa} \aleph_{\eta_\xi + 1}$ die wahre Konfinalität $\aleph_{\eta+1}$ in $<_I$.*

Beweis. Wir führen den Beweis nur für $2^\kappa < \aleph_\eta$, die allgemeine Variante findet sich bei Burke und Magidor.

Sei $\lambda = \aleph_{\eta+1}$. Wir suchen einen λ-Scale. $\prod_{\xi < \kappa} \aleph_{\eta_\xi + 1}$ ist λ-gerichtet: Wir zeigen zuerst, dass $\prod_{\xi < \kappa} \aleph_{\eta_\xi + 1}$ $\aleph_\eta$-gerichtet ist. Sei dazu $F \subset \prod_{\xi < \kappa} \aleph_{\eta_\xi + 1}$

eine Familie kleiner als $\aleph_\eta$. Dann können wir folgendermaßen eine obere Schranke h definieren:

$$h(\xi) = \begin{cases} \sup\{f(\xi) | f \in F\} & \text{für } \xi \text{ mit } \eta_\xi > |F| \\ \text{beliebig} & \text{sonst} \end{cases}$$

Daraus erhalten wir auch die λ-Gerichtetheit, weil λ singulär ist. Dazu zerlegen wir ein F der Mächtigkeit $\aleph_\eta$ in κ-viele F_α der Mächtigkeit kleiner $\aleph_\eta$. Dann hat jedes F_α eine obere Schranke. Diese oberen Schranken haben aber wie oben wieder eine obere Schranke, also ist $\prod_{\xi<\kappa} \aleph_{\eta_\xi+1}$ λ-gerichtet.

Nach Korollar 2 gilt (da wegen unserer Einschränkung $2^\kappa < \lambda$ ist), dass es, wenn kein λ-Scale existiert, eine stationäre Teilmenge $S \subset \kappa$ geben muss, sodass $\prod_{\xi\in S} \aleph_{\eta_\xi+1}$ λ^+-gerichtet ist.

Wir konstruieren nun eine $<_I$-aufsteigende λ-Folge in $\prod_{\xi\in S} \aleph_{\eta_\xi+1}$, die γ-schnell ist für alle regulären $\gamma < \aleph_\eta$. Sei für jede Limesordinalzahl $\beta < \lambda$ die Teilmenge $C_\beta \subset \beta$ abgeschlossen, unbeschränkt und von der Größe $\operatorname{cf}\beta$. Wie konstruieren nun induktiv $F = \langle f_\alpha | \alpha < \lambda\rangle$:

Sei α eine Limesordinalzahl. Für jede Limeszahl $\beta > \alpha$ sei s_β wie in Definition 2 das punktweise Supremum von $\{f_\nu | \nu \in C_\beta \cup \alpha\}$. Für fast alle $\xi < \kappa$ gilt $s_\nu(\xi) < \aleph_{\eta_{\xi+1}}$, daher haben wir $s_\nu \in \prod_{\xi\in S} \aleph_{\eta_\xi+1}$. Da $\prod_{\xi\in S} \aleph_{\eta_\xi+1}$ λ^+-gerichtet ist, können wir ein f_α finden, sodass $f_\alpha >_I s_\beta$ auf S für alle Limeszahlen $\beta < \lambda$ gilt. Dadurch ist sichergestellt, dass F für alle regulären, überabzählbaren $\gamma < \lambda$ γ-schnell ist.

Nach Lemma 1 hat F eine exakte obere Schranke g. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gilt $g(\xi) \leq \aleph_{\eta_\xi+1}$ für alle $\xi \in S$.

Angenommen, $g(\xi) \geq \aleph_{\eta_\xi+1}$ für fast alle $\xi \in S$, dann ist F ein Scale auf S, im Gegensatz zu unserer Annahme über S. Gilt aber $g(\xi) < \aleph_{\eta_\xi+1}$ für stationär viele ξ, dann ist $\operatorname{cf} g(\xi) < \aleph_{\eta_\xi}$, und damit gibt es ein $\gamma < \aleph_{\eta+1}$, für das $\operatorname{cf} g(\xi) < \gamma$ für stationär viele ξ's erfüllt ist. Dies widerspricht aber Korollar 3, denn F ist γ-schnell für alle $\gamma < \lambda$.

Also kann es die Menge S mit den gewünschten Eigenschaften nicht geben, woraus nach Korollar 2 die Existenz unseres gesuchten λ-Scales folgt. ☺