Ausarbeitung zum Vortrag: Shelahs Abschätzung

Referent: Allard van Veen
21.07.2009

Um das Hauptresultat des Vortrags beweisen zu können, müssen wir uns zunächst ein technisches Hilfsmittel erarbeiten, das sogenannte

Club-Guessing

Def: Sei $A \subset \mathrm{Lim}$ eine Menge. Eine Folge $\langle c_\alpha | \alpha \in A\rangle$ von clubs $c_\alpha \subseteq \alpha$ mit $\operatorname{otp} c_\alpha = \operatorname{cf} \alpha$ heißt club-Sequenz.

Bem: Jedes $\alpha \in \mathrm{Lim}$ enthält einen club $C \subseteq \alpha$ mit $\operatorname{otp} C = \operatorname{cf} \alpha$ (etwa $C := \operatorname{ran} f$ für eine normale Funktion $f : \operatorname{cf} \alpha \to \alpha$ mit $\sup f = \alpha$). Mit AC folgt die Existenz einer club-Sequenz $\langle c_\alpha | \alpha \in A\rangle$ für jede Menge $A \subset \mathrm{Lim}$.
Umgekehrt gilt $\operatorname{otp} x \geq \operatorname{cf} \alpha$ für jede in $\alpha \in \mathrm{Lim}$ unbeschränkte Menge $x \subseteq \alpha$. Insbesondere folgt $\operatorname{otp} c'_\alpha = \operatorname{cf} \alpha$ für jede in α unbeschränkte Menge $c'_\alpha \subseteq c_\alpha$ wenn $\langle c_\alpha | \alpha \in A\rangle$ eine club-Sequenz ist.
Schließlich findet man zu jeder Folge $\langle c_\alpha | \alpha \in A\rangle$ von clubs $c_\alpha \subseteq \alpha$ eine club-Sequenz $\langle c'_\alpha | \alpha \in A\rangle$ mit $c'_\alpha \subseteq c_\alpha$.

Def: Für $\kappa, \lambda \in \mathrm{Reg}$ mit $\lambda < \kappa$ sei $E^\kappa_\lambda := \{\alpha \in \kappa \cap \mathrm{Lim} \mid \operatorname{cf} \alpha = \lambda\}$

Lemma: E^κ_λ ist stationär in κ.

Beweis: Sei $C \subseteq \kappa$ club. zu zeigen ist, dass es ein $\alpha \in C$ mit $\operatorname{cf} \alpha = \lambda$ gibt. Wir konstruieren dazu rekursiv eine normale λ-Folge $f = \langle \beta_i | i < \lambda\rangle$ von Elementen aus C:
Wir wählen $\beta_0 \in C$ beliebig und für jedes $i < \lambda$ ein $\beta_{i+1} > \beta_i$. Für $i \in \mathrm{Lim} \cap \lambda$ setzen wir $\beta_i := \bigcap_{\xi < i} \beta_\xi$. Wegen $\lambda < \kappa = \operatorname{cf} \kappa$ ist $\langle \beta_\xi | \xi < i\rangle$ für alle $i \leq \lambda$ beschränkt in κ, und da C in κ abgeschlossen ist, folgt $\beta_i \in C$ sowie $\alpha := \sup f \in C$. Da λ regulär ist, gilt ferner $\operatorname{cf} \alpha = \lambda$: $\operatorname{ran} f$ ist club in α da f normal ist, also gilt $\lambda \geq \operatorname{cf} \alpha$. Umgekehrt enthält $\operatorname{ran} f$ einen α-club x mit $\operatorname{otp} x = \operatorname{cf} \alpha$. Somit ist $f^{-1}[x]$ club in λ mit $\operatorname{otp} f^{-1}[x]$ da f normal ist. Das liefert $\operatorname{cf} \lambda \leq \operatorname{cf} \alpha$.

Lemma: Für jeden club $C \subseteq \kappa$ und jede in κ stationäre Menge $\Sigma \subseteq E^\kappa_\lambda$ ist $\{\alpha \in \Sigma | C \cap \alpha \,\text{club in}\, \alpha\}$ stationär in κ.

Beweis: Es werde mit $\operatorname{acc} C$ die Menge der Häufungspunkte von C in κ bezeichnet. Mit C ist auch $\operatorname{acc} C$ club in κ (sonst sei $\gamma \in \kappa$ eine obere Schranke für $\operatorname{acc} C$). Dann existiert wegen $\operatorname{cf} \kappa > \omega$ eine normale ω-Folge f von Elementen aus C mit $f(0) = \gamma$ und $\sup f < \kappa$ also $\gamma < \sup f \in \operatorname{acc} C$).

$C \cap \alpha$ ist club in α gdw. $\alpha \in \operatorname{acc} C$. Da der Durchschnitt einer κ-stationären Menge und eines κ-clubs κ-stationär ist (sei S stationär, x club, so ist $x \cap y$ für jeden weiteren club y wieder club und somit gilt $(S \cap x) \cap y = S \cap (x \cap y) \neq \emptyset$), liefert $\{\alpha \in \Sigma | C \cap \alpha \, \text{club in} \, \alpha\} = \Sigma \cap \operatorname{acc} C$ die Behauptung des Lemmas.

Def: Sei $\Sigma \subseteq E^\kappa_\lambda$ stationär in κ. Eine club-Sequenz $\langle c_\alpha | \alpha \in \Sigma \rangle$ heißt club-guessing-Sequenz (kurz: cg-Sequenz) wenn für jede club-Menge $C \subseteq \kappa$ die Menge $\{\alpha \in \Sigma | c_\alpha \subseteq C\}$ der Stellen α, an denen C „erraten" wird ($c_\alpha \subseteq C$), stationär in κ ist.

Bem: Sei $\langle c_\alpha | \alpha \in \Sigma \rangle$ eine Folge von Mengen $c_\alpha \subseteq \alpha$ und für jeden club $C \subseteq \kappa$ existiere eine stationäre Menge $S_C \subseteq \kappa$ so dass $\langle c_\alpha | \alpha \in S_C \rangle$ eine club-Sequenz ist, die C errät. Dann ist sicherlich c_α club in α für stationär viele α und wählt man an den übrigen Stellen beliebige clubs $c_\alpha \subseteq \alpha$ mit $\operatorname{otp} c_\alpha = \lambda$, so erhält man eine cg-Sequenz.

Die Existenz von cg-Sequenzen ist nicht für alle $\lambda, \kappa \in \mathrm{Reg}$ mit $\lambda < \kappa$ in ZFC beweisbar. Es gilt aber folgender

Satz (Shelah)**:** Für alle $\kappa, \lambda \in \mathrm{Reg}$ mit $\lambda > \aleph_0$ und $\lambda^+ < \kappa$ (z.B. $\lambda = \aleph_1, \kappa = \aleph_3$) und jede in κ stationäre Menge $\Sigma \subseteq E^\kappa_\lambda$ existiert eine cg-Sequenz $\langle c_\alpha | \alpha \in \Sigma \rangle$.

Beweis: Es genügt, eine Folge $\langle c_\alpha | \alpha \in \Sigma \rangle$ von Mengen $c_\alpha \subseteq \alpha$ zu finden, die für jeden club $C \subseteq \kappa$ jeweils auf einer in κ stationären Menge $S_C \subseteq \Sigma$ club-Sequenz ist und dort C errät.
Angenommen, es existiere keine solche Folge. Wir konstruieren für alle $i < \lambda^+$ eine Folge $\langle c^i_\alpha | \alpha \in \Sigma \rangle$ von Mengen $c^i_\alpha \subseteq \alpha$ und wählen dazu jeweils einen club $C_i \subseteq \kappa$, so dass $\langle c^i_\alpha | \alpha \in \Sigma \rangle$ für keine in κ stationären Menge $S \subseteq \Sigma$ eine club-Sequenz ist, die C_i errät:
Sei $\langle c^0_\alpha | \alpha \in \Sigma \rangle$ eine beliebige club-Sequenz und $C_0 \subseteq \kappa$ ein club, der nicht erraten wird.
Für Nachfolger und Limites $i < \lambda^+$ setzen wir gleichermaßen

$$c^i_\alpha := c^0_\alpha \cap \bigcap_{\xi < i} C_\xi$$

und wählen einen club $C_i \subseteq \kappa$ wie beschrieben. Wir setzen schließlich $C := \bigcap_{i < \lambda^+} C_i$ und $c_\alpha := c^0_\alpha \cap C$. Die Folge $\langle c^i_\alpha | i < \lambda^+ \rangle$ ist für alle $\alpha \in \Sigma$ $\subseteq$-absteigend:

$$c^0_\alpha \supseteq c^1_\alpha \supseteq \ldots \supseteq c_\alpha$$

Ist $c^i_\alpha \subseteq \alpha$ club so gilt auch $\operatorname{otp} c^i_\alpha = \lambda$.

Der Durchschnitt von weniger als $\operatorname{cf}\kappa$ clubs in κ ist club in κ, also folgt induktiv wegen $i \leq \lambda^+ < \kappa = \operatorname{cf}\kappa$, dass $\bigcap_{\xi<i} C_\xi$ für alle $i \leq \lambda^+$ club in κ ist. Somit ist $c_\alpha^i \subseteq \alpha$ abgeschlossen für alle $\alpha \in \Sigma$.

<u>Beh:</u> (1) $c_\alpha^{i+1} = c_\alpha^i \cap C_i$ (klar) und (2) $c_\alpha^i = \bigcap_{\xi<i} c_\alpha^\xi$ für $i \in \mathrm{Lim}, i < \lambda^+$, sowie $c_\alpha = \bigcap_{i<\lambda} c_\alpha^i$

Beweis: $i \in \mathrm{Lim}:\quad \xi < i \Rightarrow c_\alpha^i \subseteq c_\alpha^\xi$, also $c_\alpha^i \subseteq \bigcap_{\xi<i} c_\alpha^\xi$;
$\xi < i \Rightarrow \xi + 1 < i$ also $\bigcap_{\xi'<i} c_\alpha^{\xi'} \subseteq c_\alpha^{\xi+1} \subseteq C_\xi$ nach (1) und somit $\bigcap_{\xi<i} c_\alpha^\xi \subseteq c_\alpha^i$ nach Definition von c_α^i.

Wegen $\bigcap_{\xi<i} C_\xi \supseteq C$ ist für die in κ stationäre Menge $S := \Sigma \cap \operatorname{acc} C$ und alle $i < \lambda^+$ die Folge $\langle c_\alpha^i | \alpha \in S\rangle$ eine club-Sequenz.

<u>Beh:</u> Für jedes $\alpha \in S$ ist die Folge $\langle c_\alpha^i | i < \lambda^+\rangle$ schließlich konstant:
$\exists i_\alpha < \lambda^+ \, \forall i \geq i_\alpha :\ \ c_\alpha^i = c_\alpha^{i_\alpha}\quad$ (d.h. $= c_\alpha$ denn $c_\alpha = \bigcap_{i<\lambda^+} c_\alpha^i$)

Bem: Für $i \geq i_\alpha$ bedeutet das aber $c_\alpha^i = c_\alpha^{i+1} = c_\alpha^i \cap C_i$ (nach (1)), d.h. $c_\alpha^i \subseteq C_i$, c_α^i errät C_i.

Beweis: Für $i < \lambda^+$ definieren wir $D_i := c_\alpha^i - c_\alpha^{i+1}$ und setzen $I := \{i < \lambda^+ | D_i \neq \emptyset\}$. Dann ist $c_\alpha^0 = \bigsqcup_{i\in I} D_i$ und somit

$$\lambda = |c_\alpha^0| = \sum_{i\in I} |D_i| \geq \sum_{i\in I} 1 = |I|$$

Also ist $|I|$ in λ^+ beschränkt da λ^+ regulär ist.

<u>Beh:</u> Es gibt ein $\nu < \lambda^+$ und eine in κ stationäre Menge $T \subseteq S$ so dass $c_\alpha^\nu = c_\alpha$ auf T.

Das liefert den gewünschten Widerspruch, da dann $\langle c_\alpha^\nu | \alpha \in T\rangle$ eine club-Sequenz ist, die C_ν errät.

Beweis: Sonst definieren wir $T_i := \{\alpha \in S | c_\alpha^i = c_\alpha\}$ für $i < \lambda^+$ und wählen jeweils eine club-Menge $X_i \subseteq \kappa$ mit $X_i \cap T_i = \emptyset$ (T_i ist nicht-stationär). Wegen $\lambda^+ < \kappa$ ist dann $X := \bigcap_{i<\lambda^+} X_i$ club in κ mit $X \cap \bigcup_{i<\lambda^+} T_i = \emptyset$ aufgrund der Wahl der X_i und $X \cap S \neq \emptyset$ da S stationär. Für $\alpha \in X \cap S$ gilt dann aber $c_\alpha^i \neq c_\alpha$ für alle $i < \lambda^+$ im Widerspruch dazu, dass $\langle c_\alpha^i | i < \lambda^+\rangle$ schließlich konstant wird.

Shelahs Schranke für $2^{\aleph_\omega}$

Nach einem Resultat von W. B. Easton werden die in einem Modell von ZFC realisierbaren Werte der Kontinuumsfunktion $\kappa \mapsto 2^\kappa$ für reguläre Kardinalzahlen nur durch zwei Bedingungen eingeschränkt: $\lambda < \kappa \Rightarrow 2^\lambda < 2^\kappa$ und $\kappa < \operatorname{cf} 2^\kappa$.
Insbesondere ist in ZFC nicht entscheidbar, ob die kleinste singuläre Kardinalzahl $\aleph_\omega$ ein starker Limes ist. Wir werden nun als Hauptresultat des Vortrags folgenden Satz beweisen:

Satz (Shelah)**:** Ist $\aleph_\omega$ eine starke Limeskardinalzahl, d.h. gilt $2^{\aleph_n} < \aleph_\omega$ für alle $n < \omega$, so ist der Wert der Kontinuumsfunktion an der Stelle $\aleph_\omega$ durch $\aleph_{\omega_4}$ beschränkt:

$$2^{\aleph_\omega} < \aleph_{\omega_4}$$

Ist $\aleph_\omega$ ein starker Limes, so gilt $\operatorname{pcf}[\aleph_0, \aleph_\omega) = [\aleph_0, 2^{\aleph_\omega}]$ und $2^{\aleph_\omega} < \aleph_{(2^{\aleph_0})^+}$ ist eine Nachfolgerkardinalzahl, d.h. es existiert ein $\theta \in \mathrm{Ord}$ mit $2^{\aleph_\omega} = \aleph_{\theta+1}$. Daraus ergibt sich zunächst $\theta < (2^{\aleph_0})^+ < \aleph_\omega$. Im Folgenden wird nun $\theta < \omega_4$ gezeigt.
Dazu wird eine Funktion $F : \mathrm{Pot}(\theta) \to \mathrm{Ord}$ definiert so dass sich unter der Voraussetzung $\theta \geq \omega_4$ eine Menge $X \in \mathrm{Pot}(\theta)$ und ein $\eta \in \mathrm{Ord}$ finden lassen mit $F(X) \geq \eta$ und $F(X) < \eta$.

Def: Sei $\aleph_+$ der Ordnungshomomorphismus $\alpha \mapsto \aleph_{\alpha+1}$. Wir setzen dann für $X \subseteq \theta$:

$$\bar{X} := \aleph_+^{-1}[\operatorname{pcf} \aleph_+[X]]$$

<u>Beh:</u> Für alle $X \subseteq \theta$ hat $\bar{X}$ ein Maximum.

Beweis: Sei $A \subset \mathrm{Reg}$ eine Menge mit $|A| < \aleph_\omega$. Da $\aleph_\omega$ starker Limes ist, existiert ein $n < \omega$ so dass $2^{|A|} = \aleph_n$. Es gilt

$$\operatorname{pcf} A = (A \cap [\aleph_0, \aleph_n]) \cup \operatorname{pcf}(A - [\aleph_0, \aleph_n])$$

(denn für endliches B ist $\operatorname{pcf} B = B$). Für $\operatorname{pcf}(A - [\aleph_0, \aleph_n]) \neq \emptyset$ folgt aus $2^{|A-[\aleph_0,\aleph_n]|} \leq 2^{|A|} < \min(A - [\aleph_0, \aleph_n])$ mit 24.28 dass $\operatorname{pcf}(A - [\aleph_0, \aleph_n])$ ein Maximum hat.
Wegen $|\aleph_+[X]| = |X| \leq \theta < \aleph_\omega$ hat also $\operatorname{pcf} \aleph_+[X]$ ein Maximum und es folgt $\sup \bar{X} = \sup \aleph_+^{-1}[\operatorname{pcf} \aleph_+[X]] = \aleph_+^{-1}(\sup \operatorname{pcf} \aleph_+[X]) \in \bar{X}$

Lemma: Die Funktion $F : \mathrm{Pot}(\theta) \to \mathrm{Ord}$, $F(X) := \max \bar{X}$ hat folgende Eigenschaften

(1) $X \subseteq Y \subseteq \theta \Rightarrow F(X) \leq F(Y)$ und $\sup X \leq F(X)$

(2) Für jedes $\eta \in \mathrm{Lim}$, $\eta < \theta$ mit $\operatorname{cf} \eta > \omega$ existiert ein club $C \subseteq \eta$ mit $F(C) = \eta$.

(3) Für jedes $X \subseteq \theta$ mit $\operatorname{otp} X = \omega_1$ existiert ein $\beta \in X$ so dass
$F(X \cap \beta) \geq \sup X$.

Beweis: (1) $X \subseteq Y \Rightarrow \aleph_+[X] \subseteq \aleph_+[Y] \Rightarrow \operatorname{pcf} \aleph_+[X] \subseteq \operatorname{pcf} \aleph_+[Y] \Rightarrow \bar{X} \subseteq \bar{Y}$ und $\aleph_+[X] \subseteq \operatorname{pcf} \aleph_+[X] \Rightarrow X \subseteq \bar{X} \Rightarrow \sup X \leq F(X)$

(2) $\kappa \leq \eta < \theta < \aleph_\omega \Rightarrow 2^\kappa < \aleph_\omega < \aleph_\eta$; Wegen $\eta \in \mathrm{Lim}$ gilt $\operatorname{cf} \aleph_\eta = \operatorname{cf} \eta = \kappa < \aleph_\eta$ d.h. $\aleph_\eta$ ist singulär. Nach 24.30 existiert somit ein club $C \subseteq \eta$ mit $\max \operatorname{pcf} \aleph_+[C] = \aleph_{\eta+1}$, d.h. $F(C) = \eta$.

(3) Um das Lokalisationslemma 24.32 anwenden zu können, suchen wir eine passende Menge $A \subseteq [\aleph_0, \aleph_\omega)$ mit $2^{|\operatorname{pcf} A|} < \min A$ $(\star)$. Es gilt

$$|\operatorname{pcf}[\aleph_0, \aleph_\omega)| = |[\aleph_0, 2^{\aleph_0}]| + |\operatorname{pcf}[(2^{\aleph_0})^+, \aleph_\omega)|$$

(denn $\forall B \quad \min \operatorname{pcf} B = \min B$, die Zerlegung ist disjunkt), also folgt nach 24.26 ($2^{|B|} < \min B \Rightarrow |\operatorname{pcf} B| \leq 2^{|B|}$): $|\operatorname{pcf}[\aleph_0, \aleph_\omega)| \leq \aleph_0 + 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$ und somit $2^{|\operatorname{pcf}[\aleph_0, \aleph_\omega)|} < 2^{2^{\aleph_0}} = \aleph_n$ für ein $n < \omega$ da $\aleph_\omega$ starker Limes ist. $A := [\aleph_{n+1}, \aleph_\omega)$ erfüllt $(\star)$. Wir setzen nun ferner

$$Y := \aleph_+[X] \cap \operatorname{pcf} A = \aleph_+[X] - [\aleph_0, \aleph_n]$$

(nach Definition von θ ist $\aleph_+[X] \subseteq= [\aleph_0, \aleph_{\theta+1}]$ für alle $X \subseteq \theta$). Dann gilt $Y \subseteq \operatorname{pcf} A$, $\operatorname{otp} Y = \operatorname{otp} \aleph_+[X] = \operatorname{otp} X$ (denn es wurde nur ein endliches Anfangsstück entfernt), $\sup Y = \sup \aleph_+[X] = \aleph_{\sup X}$ (denn wegen $\operatorname{otp} X = \omega_1$ ist $\sup X \notin X$), $\operatorname{pcf} Y = \operatorname{pcf} \aleph_+[X] - [\aleph_0, \aleph_n]$ und $\max \operatorname{pcf} Y = \max \operatorname{pcf} \aleph_+[X]$. Wir setzen schließlich

$$\lambda := \max \operatorname{pcf} Y = \max \operatorname{pcf} \aleph_+[X] \geq \sup \aleph_+[X] = \aleph_{\sup X}$$

Nach 24.32 existiert ein $W \subseteq Y$ mit $|W| = |A|$ und $\lambda \in \operatorname{pcf} W$. Wegen $\operatorname{otp} Y = \omega_1$, $\operatorname{cf} \omega_1 = \omega_1$ und $|W| = \aleph_0$ gilt $\sup W < \sup Y = \sup \aleph_+[X] = \aleph_{\sup X}$, d.h. es existiert ein $\beta \in X$ mit $\aleph_+^{-1}[W] \subseteq X \cap \beta$. Es folgt

$$F(X \cap \beta) \geq F(\aleph_+^{-1}[W]) = \max \aleph_+^{-1}[\operatorname{pcf} W] \geq \sup X$$

da $\lambda \in \operatorname{pcf} W$.

Sei nun also $\theta \geq \omega_4$. Sei $\langle c_\alpha | \alpha \in E^{\aleph_3}_{\aleph_1}\rangle$ eine cg-Sequenz und $\langle M_i | i < \omega_3\rangle$ eine Folge von elementaren Substrukturen von $H(\kappa)$, $\kappa \in \mathrm{Reg}$ hinreichend groß, so dass gilt:

(1) $\langle M_i | i < \omega_3\rangle$ ist eine stetige, elementare Kette

(2) $\langle M_j | j \leq i\rangle \in M_{i+1}$ für alle $i < \omega_3$

(3) $|M_i| = \aleph_3$ für alle $i < \omega_3$ und

(4) $\omega_3 \cup \{\langle c_\alpha | \alpha \in E^{\aleph_3}_{\aleph_1}\rangle, F, \omega_4\} \subseteq M_0$

Wir definieren

$$\eta : \omega_3 \to \omega_4\,, \quad i \mapsto \sup(M_i \cap \omega_4)$$

Wegen $|M_i| = \aleph_3$ und $\mathrm{cf}\,\omega_4 = \omega_4$ kann $M_i \cap \omega_4$ nicht konfinal in ω_4 sein. η ist eine normale Funktion mit $\sup \eta < \omega_4$: Die Stetigkeit von η ergibt sich sofort aus (1). Aus (2) folgt $M_i \in M_{i+1}$ für alle $i < \omega_3$, d.h. $\eta(i) = \sup(M_i \cap \omega_4) < \omega_4$ ($|M_i \cap \omega_4| \leq \aleph_3$) ist mit Parametern aus M_{i+1} definierbar, somit $\in M_{i+1} \cap \omega_4$. Dann ist aber auch $\eta(i) + 1 \in M_{i+1} \cap \omega_4$, also gilt $\eta(i) < \eta(i+1)$. Schließlich ist dann $\mathrm{otp}\,\mathrm{ran}\,\eta = \omega_3$, d.h. η muss in ω_4 beschränkt sein. Wegen $\mathrm{cf}\,\omega_3 = \omega_3$ erhält man außerdem noch $\mathrm{cf}\sup\eta = \omega_3$. Nach obigem Lemma existiert ein club $C' \subseteq \sup\eta$ mit $F(C') = \sup\eta$. Dann ist auch $C'' := C' \cap \mathrm{ran}\,\eta$ club in $\sup\eta$ und folglich $C := \eta^{-1}[C'']$ club in ω_3 mit $F(\eta[C]) = F(C'') = \sup\eta$ (denn $F(C'') \leq F(C')$ und $F(C'') \geq \sup C'' = \sup\eta$).
Sei nun $\alpha \in E^{\aleph_3}_{\aleph_1}$ eine Stelle mit $c_\alpha \subseteq C$. Dann ist $\eta[c_\alpha]$ club in $\eta(\alpha)$ mit $\mathrm{otp}\,\eta[c_\alpha] = \mathrm{otp}\,c_\alpha = \mathrm{cf}\,\alpha = \omega_1$ und eine weitere Anwendung des Lemmas liefert die Existenz eines $\beta' \in \eta[c_\alpha]$ mit $F(\eta[c_\alpha] \cap \beta') \geq \sup\eta[c_\alpha] = \eta(\alpha)$. Da η normal ist erhält man $\eta^{-1}[\eta[c_\alpha] \cap \beta'] = c_\alpha \cap \eta^{-1}(\beta')$. Mit $\beta := \eta^{-1}(\beta') < \alpha$ und $X := \eta[c_\alpha \cap \beta]$ gilt dann

$$F(X) \geq \eta(\alpha)$$

Wegen (4) sind α, β, und somit auch $c_\alpha \in M_0$. (1) und (2) liefern unmittelbar $\langle M_i | i \leq \beta\rangle \in M_{\beta+1} \subseteq M_\alpha$, also $X \in M_\alpha$ und damit $F(X) \in M_\alpha$ aufgrund von (4). Daraus folgt aber

$$F(X) < \sup(M_\alpha \cap \omega_4) = \eta(\alpha)$$

wegen $F(X) \leq F(\eta[C]) = \sup\eta < \omega_4$ und $\sup(M_\alpha \cap \omega_4) \notin M_\alpha \cap \omega_4$ (mit $\gamma \in M_\alpha \cap \mathrm{Ord}$ ist stets auch $\gamma + 1 \in M_\alpha$).

Quellen: T. Jech: *Set Theory*; M. Holz, K. Steffens, E. Weitz: *Introduction to Cardinal Arithmetic*