Mathematisches Institut
der Universität Bonn
P. Koepke, B. Irrgang

WS 08/09
12. 11. 08
Blatt 5

Übungen zur Mengenlehre

17. Rekursion für stark fundierte Relationen:

Seien A, R und G Klassen, sei R stark fundiert auf A und $G : V \to V$. Dabei heißt R stark fundiert, wenn es fundiert ist und $\forall x \; \{y \mid yRx\} \in V$ erfüllt.

Zeigen Sie: Es gibt eine Klasse $F : A \to V$, die

$$\forall x \in A \; F(x) = G(\{(z, F(z)) \mid zRx\})$$

erfüllt.

18. Zeigen Sie, dass die Mengen $\{f \mid f : \omega \to 2\}$, $\{f : \omega \to \omega \mid f \text{ bijektiv}\}$, $\mathfrak{P}(\omega)$ und $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$ gleichmächtig sind.

19. Zeigen Sie, dass für alle Kardinalzahlen κ, λ, μ Folgendes gilt:

(a) $\kappa^{\lambda+\mu} = \kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu$

(b) $(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda \cdot \mu}$

(c) $\kappa^\mu \leq \lambda^\mu$, falls $\kappa \leq \lambda$

(d) $\kappa^\lambda \leq \kappa^\mu$, falls $0 < \lambda \leq \mu$.

20. (a) In der Vorlesung wurde die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen als eine Menge von Anfangsstücken von $\mathbb{Q}$ definiert. Definieren Sie darauf Addition und Multiplikation. Sie dürfen dabei die bereits definierte Addition und Multiplikation in $\mathbb{Q}$ verwenden.

(b) Zeigen Sie, dass das von Ihnen definierte $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ein Körper ist. Sie dürfen dabei verwenden, dass $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ein Körper ist.

Jede Aufgabe wird mit 8 Punkten bewertet.

Abgabe: am 19. 11. 08 in der Vorlesungspause