Mathematisches Institut
der Universität Bonn
P. Koepke, B. Irrgang

WS 08/09
05. 11. 08
Blatt 4

Übungen zur Mengenlehre

13. Zeigen Sie für alle $\alpha, \beta, \gamma \in Ord$ durch (transfinite) Induktion:

(a) $\alpha + \beta \in Ord$.

(b) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$.

(c) $\beta < \gamma \rightarrow \alpha + \beta < \alpha + \gamma$.

(d) Die Ordinalzahladdition ist nicht kommutativ, aber es gilt $n+m = m+n$ für alle $n, m \in \omega$.

14. Seien $H_1, H_2 : V \rightarrow V$, $x_0 \in V$. Zeigen Sie, dass es dann eine eindeutig bestimmte Funktion $F : Ord \rightarrow V$ gibt, so dass $F(0) = x_0$, $F(\alpha + 1) = H_1(F(\alpha))$ für alle $\alpha \in Ord$ und $F(\alpha) = H_2(F \upharpoonright \alpha)$ für $\alpha \in Lim$ gilt.

15. Zeigen Sie:

(a) In der Ordinalzahlarithmetik gilt $2^\omega = \omega$. D.h. ω ist ein Fixpunkt der Funktion 2^α.

(b) Jede monotone und stetige Funktion $F : Ord \rightarrow Ord$ hat beliebig große Fixpunkte.
D.h. ist $F : Ord \rightarrow Ord$ ordnungserhaltend und $F(\lambda) = sup\{F(\alpha) \mid \alpha < \lambda\}$ für alle $\lambda \in Lim$, so gibt es zu jedem $\gamma \in Ord$ ein $\delta > \gamma$ mit $F(\delta) = \delta$.

16. Induktion für fundierte Relationen:
Sei R eine fundierte Relation auf A und $\varphi(x, \overrightarrow{w})$ eine $\in$-Formel. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\forall x \in A\ (\forall y (yRx \rightarrow \varphi(y, \overrightarrow{w})) \rightarrow \varphi(x, \overrightarrow{w})) \rightarrow \forall x \in A\ \varphi(x, \overrightarrow{w}).$$

Dabei heißt eine Relation R auf A fundiert, wenn jedes nicht leere $X \subseteq A$ ein R-minimales Element hat. Das ist ein $a \in X$, so dass es kein $x \in X$ mit xRa gibt.

Jede Aufgabe wird mit 8 Punkten bewertet.

Abgabe: am 12. 11. 08 in der Vorlesungspause