Mathematisches Institut
der Universität Bonn
P. Koepke, B. Irrgang

SoSe 2008
18. 06. 08
Blatt 9

Übungen zur Mathematischen Logik

Dieses Blatt bezieht sich auf Kapitel VIII der "Einführung in die mathematische Logik" von Ebbinghaus, Flum, Thomas. Es kann aber auch ohne dieses Kapitel bearbeitet werden.

33. Sei S eine Symbolmenge und Φ eine Menge von S-Sätzen. Sei $R \notin S$ ein n-stelliges Relationssymbol und Δ enthalte nur einen Satz der Form

$$\forall v_1 \ \ldots \ \forall v_n \ (Rv_1 \ldots v_n \leftrightarrow \varphi(v_1, \ldots, v_n)).$$

Zeigen Sie: Gilt $\Phi \cup \Delta \models \psi$ und $\mathfrak{M} \models \Phi$, so ist $(\mathfrak{M}, R^{\mathfrak{M}}) \models \psi$ wobei

$$R^{\mathfrak{M}} := \{(x_1, \ldots, x_n) \mid \mathfrak{M} \models \varphi[x_1, \ldots, x_n]\}.$$

34. Verallgemeinern Sie die Aussage aus Aufgabe 33 auf Funktionssymbole und Konstanten, und zeigen sie die verallgemeinerte Aussage.

35. Sei S eine Symbolmenge und P ein einstelliges Relationssymbol. Durch Induktion definiere für jeden S-Ausdruck ψ einen S-Ausdruck ψ^P durch
$\psi^P := \psi$ falls ψ atomar ist
$(\neg\psi)^P := \neg\psi^P, \quad (\varphi \vee \psi)^P := (\varphi^P \vee \psi^P)$
$(\exists x \ \psi)^P := \exists x \ (Px \wedge \psi^P)$.
Für S-Strukturen $\mathfrak{M}$ sei $P^{\mathfrak{M}}$ definiert wie in Aufgabe 33. Zeigen Sie: Ist $(P^{\mathfrak{M}}, \ldots)$ Substruktur von $\mathfrak{M}$, so gilt für alle S-Sätze ψ

$$\mathfrak{M} \models \psi^P \quad \Leftrightarrow \quad (P^{\mathfrak{M}}, \ldots) \models \psi.$$

Bitte wenden.

36. Sei S die Sprache mit einem einstelligen Funktionssymbol σ und einer Konstanten 0. Betrachte die Axiome

(P1) $\forall x \neg \sigma x \equiv 0$

(P2) $\forall x \, \forall y \, (\sigma x \equiv \sigma y \to x \equiv y)$

$(\mathrm{Ind})_\varphi \quad (\varphi(0) \ \wedge \ \forall x(\varphi(x) \to \varphi(\sigma x))) \to \forall y \, \varphi(y)$.

Definiere das Axiomensystem der Peano-Arithmetik durch

$\mathrm{PA} = \{(\mathrm{P1}), (\mathrm{P2}), (\mathrm{Ind})_\varphi \mid \varphi \ S\text{-Ausdruck}\}$.

Definieren Sie in der Sprache der Mengenlehre eine einstellige Relation ω, eine einstellige Funktion σ und eine Konstante 0, so dass für alle Strukturen $\mathfrak{M}$ gilt:

$$\mathfrak{M} \models \mathrm{ZFC} \quad \Rightarrow \quad (\omega^{\mathfrak{M}}, \sigma^{\mathfrak{M}}, 0^{\mathfrak{M}}) \models \mathrm{PA}.$$

Zeigen Sie diese Eigenschaft von $\omega, \sigma, 0$.

Hinweis: ω wurde bereits in der Vorlesung definiert.

Jede Aufgabe wird mit 8 Punkten bewertet.

Abgabe: am 30. 06. 08 in der Vorlesung