Mathematisches Institut
der Universität Bonn
P. Koepke, B. Irrgang

SoSe 2008
09. 06. 08
Blatt 8

Übungen zur Mathematischen Logik

30. Sei $W = \mathbb{R} \cup \mathfrak{P}(\mathbb{R}) \cup \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\mathbb{R})) \cup \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\mathbb{R})))$ und $\mathfrak{W} = (W, \in \cap W^2)$.

(a) Geben Sie in der Sprache der Mengenlehre einen Ausdruck $\varphi(v_0, v_1, \ldots, v_n)$ und $x_1, \ldots, x_n \in W$ an, so dass f genau dann eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist, wenn $\mathfrak{W} \models \varphi[f, x_1, \ldots, x_n]$ gilt.

(b) Formalisieren Sie entsprechend: τ ist eine Topologie auf $\mathbb{R}$.

Bemerkung: (b) hat unter anderen eine triviale Lösung.

31. Zeigen Sie:

(a) $\mathbf{ZF} \models \forall x \; \forall y \; \exists z \; z = x \cup y$

(b) $\mathbf{ZF} \models \forall x \; \forall y \; \exists z \; z = x \times y$.

32. In der Vorlesung wurde die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen mengentheoretisch definiert und gezeigt, dass ihre Existenz aus den mengentheoretischen Axiomen folgt. Definieren Sie davon ausgehend die Menge der geraden Zahlen und zeigen Sie ihre Existenz.

Hinweis: Die gesuchte Menge ist die kleinste Menge X mit $0 \in X$ und $\forall n \; (n \in X \to n + 2 \in X)$.

33. Sei $\mathfrak{M} \models \mathbf{ZF}$.

(a) Zeigen Sie, dass dann ein $\mathfrak{M}' = (M', \in') \models \mathbf{ZF}$ und $x_1, x_2, x_3, \ldots \in M'$ existieren, so dass $\ldots \in' x_3 \in' x_2 \in' x_1$ gilt.

(b) Warum widerspricht das nicht dem Fundierungsaxiom?

Jede Aufgabe wird mit 8 Punkten bewertet.

Abgabe: am 18. 06. 08 in der Vorlesung

Übungsteilnehmer, die eine Modulprüfung ablegen oder einen Schein erwerben wollen, müssen sich bis 23. Juni bei Bernhard Irrgang anmelden:
`irrgang@math.uni-bonn.de`