Mathematisches Institut
der Universität Bonn
P. Koepke, B. Irrgang

SoSe 2008
26. 05. 08
Blatt 6

Übungen zur Mathematischen Logik

21. Sei $S = \{R\}$ die Sprache der Ordnungstheorie. Zeigen Sie, dass die Klasse der unendlichen, linearen Ordnungen Δ-elementar aber nicht elementar ist. Vgl. Aufgabe 6.

22. Eine lineare Ordnung $\leq$ auf einer Menge A heißt Wohlordung, wenn jede nicht leere Teilmenge von A ein bezüglich $\leq$ kleinstes Element hat.

Sei S eine Sprache und $\mathfrak{A} = (A, \leq, \ldots)$ eine unendliche S-Struktur, so dass $\leq$ eine Wohlordung von A ist. Zeigen Sie: Es gibt eine elementar äquivalente S-Struktur $\mathfrak{A}' = (A', \leq', \ldots)$, so dass $\leq'$ keine Wohlordnung ist.

23. Sei S eine Sprache. Eine Folge $(\mathfrak{A}_n \mid n \in \mathbb{N})$ von S-Strukturen mit

$$\mathfrak{A}_0 \subseteq \mathfrak{A}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathfrak{A}_n \subseteq \ldots$$

heißt Kette von Modellen. Die Vereinigung $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{A}_n$ der Kette $(\mathfrak{A}_n \mid n \in \mathbb{N})$ ist die folgendermaßen definierte S-Struktur:

Trägermenge ist $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Für Relationssymbole R von S sei $R^{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{A}_n} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} R^{\mathfrak{A}_n}$.

Für Funktionssymbole f von S sei $f^{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{A}_n} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{\mathfrak{A}_n}$.

Für Konstanstensymbole sei $c^{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{A}_n} = c^{\mathfrak{A}_0}$.

Eine Modellklasse $\mathfrak{K}$ heiße abgeschlossen unter Ketten, wenn für alle $(\mathfrak{A}_n \mid n \in \mathbb{N})$ mit $\mathfrak{A}_n \in \mathfrak{K}$ auch $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{A}_n \in \mathfrak{K}$ ist.

Sei Φ eine Menge von Sätzen der Form $\forall x_1 \ldots \forall x_n \exists y_1 \ldots \exists y_m \; \psi$, wobei in ψ keine Quantoren vorkommen. Zeigen Sie, dass dann $Mod^S\Phi$ abgeschlossen ist unter Ketten.

24. Eine Kette $(\mathfrak{A}_n \mid n \in \mathbb{N})$ von Modellen heißt elementare Kette, wenn

$$\mathfrak{A}_0 \prec \mathfrak{A}_1 \prec \ldots \prec \mathfrak{A}_n \prec \ldots .$$

Zeigen Sie: Ist $(\mathfrak{A}_n \mid n \in \mathbb{N})$ eine elementare Kette, so gilt $\mathfrak{A}_n \prec \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{A}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dabei bedeute $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$, dass $\mathfrak{A}$ eine elementare Substruktur von $\mathfrak{B}$ ist (siehe Aufgabe 8).

Jede Aufgabe wird mit 8 Punkten bewertet.

Abgabe: am 02. 05. 08 in der Vorlesung