Mathematisches Institut der Universität Bonn
P. Koepke, B. Irrgang

SoSe 2008
19. 05. 08
Blatt 5

Übungen zur Mathematischen Logik

17. Formulieren Sie für den Existenz- und den Allquantor jeweils eine ableitbare Regel im Sequenzenkalkül, die den Quantor im Sukzedens einführt, und eine, die ihn im Sukzedens eliminiert. Beachten Sie dabei, dass sie in machen Fällen Bedingungen an das freie Vorkommen von Variablen stellen müssen. Die $\exists$-Einführung im Sukzedens ist z. B. eine Grundregel des Sequenzenkalküls. Leiten Sie die übrigen Regeln im Sequenzenkalkül ab.

18. Satz: Jede partielle Ordnung auf einer Menge A läßt sich zu einer linearen Ordnung auf A fortsetzen.

(a) Zeigen Sie den Satz mit Hilfe des Zornschen Lemmas.

(b) Zeigen Sie den Satz mit Hilfe des Endlichkeitssatzes.

19. Sei S eine Sprache. Sei $\mathfrak{A}$ eine beliebige S-Struktur mit Trägermenge A. Zeigen Sie:

(a) Für jeden S-Ausdruck $\varphi(v_0, v_1, \ldots v_n)$ gibt es eine Funktion $f_\varphi : A^n \to A$, so dass für alle $x_1, \ldots, x_n \in A$ gilt

$$\mathfrak{A} \models \exists x_0 \; \varphi \; [x_1, \ldots, x_n] \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{A} \models \varphi \; [f_\varphi(x_1, \ldots, x_n), x_1, \ldots, x_n].$$

(b) Ist $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ abgeschlossen unter allen f_φ, so ist $\mathfrak{B}$ eine elementare Substruktur von $\mathfrak{A}$.

20. Zeigen Sie:
$\vdash \forall x \; \forall y \; (\exists u \; (x \equiv u \; \wedge \; y \equiv u) \; \to \; \forall z(x \equiv z \leftrightarrow y \equiv z))$.

Jede Aufgabe wird mit 8 Punkten bewertet.

Abgabe: am 26. 05. 08 in der Vorlesung