Mathematisches Institut
der Universität Bonn
P. Koepke, B. Irrgang

SoSe 2008
21. 04. 08
Blatt 2

Übungen zur Mathematischen Logik

5. Sei $S = \{+, \cdot, 0, 1, \leq, F\}$ die um ein einstelliges Relationssymbol F erweiterte Sprache der angeordneten Körper. Man formalisiere: "f ist im Intervall $(0, 1)$ differenzierbar". D.h. man gebe einen S-Satz φ an, so dass $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, \leq, f) \models \varphi$ genau dann gilt, wenn $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $(0, 1)$ differenzierbar ist.

6. Sei $S = \{R\}$ die Sprache der Ordnungstheorie. Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein S-Satz φ_n existiert, so dass für alle S-Strukturen $(X, \leq)$ genau dann $(X, \leq) \models \varphi$ gilt, wenn $(X, \leq)$ eine lineare Ordnung mit genau n Elementen ist. Geben Sie einen S-Satz φ an, so dass alle $(X, \leq) \models \varphi$ unendlich sind. Versuchen Sie einen Satz anzugeben, der genau die unendlichen Ordnungen als Modelle hat.

7. Sei S eine Sprache. Ein S-Ausdruck φ heiße positiv, falls er $\neg, \to, \leftrightarrow$ nicht enthält. Zeigen Sie: Jeder positive Ausdruck ist erfüllbar.

8. Sei S eine Sprache. Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ S-Strukturen mit Trägermengen A und B. Dann heißt $\mathfrak{A}$ elementare Substruktur von $\mathfrak{B}$, falls $A \subseteq B$ und für alle Belegungen β in $\mathfrak{A}$ und alle Formeln φ genau dann $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$ gilt, wenn $\mathfrak{B} \models \varphi[\beta]$ ist.
Zeigen Sie: Die Struktur $(\mathbb{N}, +)$ der natürlichen Zahlen mit ihrer Addition hat nur sich selbst als elementare Substruktur.

Jede Aufgabe wird mit 8 Punkten bewertet.

Abgabe: am 28. 04. 08 in der Vorlesung

Kennen Sie schon das Berufspraktische Kolloquium? In dieser Veranstaltungsreihe werden in Unternehmenspräsentationen und Fachvortrgen Berufsfelder für Mathematiker beschrieben. Außerdem gibt es Workshops rund um die Themen Jobsuche und Bewerben. Weitere Infos unter

http://www.math.uni-bonn.de/people/welter/bk.html