Mathematisches Institut
der Universität Bonn
P. Koepke, B. Irrgang

SoSe 2008
07. 07. 08
Blatt 11

Übungen zur Mathematischen Logik

41. Beschreiben Sie ein Programm, das belegt, dass $ZF^{\models}$ R-axiomatisierbar ist.

42. Sei Φ R-aufzählbar und $T = \Phi^{\models}$. Man zeige, dass T dann sogar R-axiomatisierbar ist.

Hinweis: Man gehe von der Aufzählung $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ von Φ zu $\varphi_0, \varphi_0 \wedge \varphi_1, \ldots$ über.

43. Sei S eine Sprache und QFA^S die Menge der Ausdrücke $\varphi \in L^S$, in denen keine Quantoren vorkommen. Sei Atm^S die Menge der atomaren Ausdrücke. Eine Abbildung $b : Atm^S \to \{0,1\}$ heißt aussagenlogische Belegung. Für $\varphi \in QFA^S$ definiere man $\varphi[b]$ durch:

$\varphi[b] = b(\varphi)$ für $\varphi \in Atm^S$

$\neg\varphi[b] = 1$ gdw $\varphi[b] = 0$

$(\varphi \wedge \psi)[b] = 1$ gdw $\varphi[b] = 1$ und $\psi[b] = 1$

$(\varphi \vee \psi)[b] = 1$ gdw $\varphi[b] = 1$ oder $\psi[b] = 1$

$(\varphi \to \psi)[b] = 1$ gdw $\varphi[b] = 0$ oder $\psi[b] = 1$.

Zeigen Sie: Kommt das Gleichheitszeichen in $\varphi \in QFA^S$ nicht vor, so ist φ genau dann erfüllbar, wenn es eine aussagenlogische Belegung b mit $\varphi[b] = 1$ gibt.

44. (a) Beschreiben Sie mit Hilfe von Aufgabe 43 ein Verfahren, das von einer Aussage $\varphi \in QFA^S$, in der das Gleichheitszeichen nicht vorkommt, entscheidet, ob sie erfüllbar ist oder nicht.

(b) Geben Sie ein $\varphi \in QFA^S$ und eine aussagenlogische Belegung b an, so dass $\varphi[b] = 1$ ist aber φ nicht erfüllbar.

Jede Aufgabe wird mit 8 Punkten bewertet.

Abgabe: am 14. 07. 08 in der Vorlesung