Mathematisches Institut
der Universität Bonn
P. Koepke, B. Irrgang

SoSe 2008
30. 06. 08
Blatt 10

Übungen zur Mathematischen Logik

Im Folgenden sollen die Wörter des Alphabets $A = \{|\}$ die natürlichen Zahlen repräsentieren. D.h. wir identifizieren die Zahl n mit n Strichen $| \ldots ||$.

37. (a) Definieren Sie für $n \in \mathbb{N}$ den Begriff der R-berechenbaren Funktionen $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$, indem Sie Programme P betrachten, die als Eingabe $x_1, \ldots, x_n$ in den Registern $R_1, \ldots, R_n$ haben und $f(x_1, \ldots, x_n)$ ausgeben.
(b) Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, (x, y) \mapsto x + y$, $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, (x, y) \mapsto x \cdot y$ und $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, (x, y) \mapsto x^y$ R-berechenbar sind.

38. Die Menge der primitiv rekursiven Funktionen definiert man folgendermaßen durch Rekursion:
- Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}, (x_1, \ldots, x_n) \mapsto 0$ p.r..
- Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $1 \leq i \leq n$ ist $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}, (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_i$ p.r..
- $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto n + 1$ ist p.r.
- Sind $g : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$ und $f_1, \ldots, f_m : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ p.r., so ist auch $h : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}, (x_1, \ldots, x_n) \mapsto g(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n))$ p.r..
- Sind $g : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ und $h : \mathbb{N}^{n+2} \to \mathbb{N}$ p.r., so ist auch $f : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ p.r. wobei $f(x_1, \ldots, x_n, 0) = g(x_1, \ldots, x_n)$ und

$$f(x_1, \ldots, x_n, m + 1) = h(x_1, \ldots, x_n, m, f(x_1, \ldots, x_n, m)).$$

Zeigen Sie: Jede primitiv rekursive Funktion ist R-berechenbar.

39. Definiere rekursiv $f : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ durch
- $f(0, n, m) = n + m$, $f(1, n, m) = n \cdot m$, $f(2, n, m) = n^m$ und
- $f(k + 1, n, 0) = 1$, $f(k + 1, n, m + 1) = f(k, n, f(k + 1, n, m))$ für $k > 1$.

Zeigen Sie, dass f R-berechenbar ist. Ist es auch primitiv rekursiv?

40. (a) Seien $A, B \subseteq \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Mit A und B sind auch $\mathbb{N} - A$, $A \cap B$ und $A \cup B$ R-entscheidbar.
(b) Gilt dies auch für R-aufzählbare Mengen? Beweisen Sie Ihre Antwort.

Jede Aufgabe wird mit 8 Punkten bewertet.

Abgabe: am 07. 07. 08 in der Vorlesung