Seminar zur Mengenlehre WS 2007/08

Prof. Dr. P. Koepke

Dr. B. Irrgang

Hand-Out zum Vortrag:

Der Satz von Kunen und $L[U]$.

Karen Räsch

19.11.2007

Literatur. Jech, Thomas: Set Theory (Third Millenium Edition, revised and expanded). Springer, Berlin, 2002; S. 96, 134 ff., 290 f., 339 f.

In diesem Vortrag werden messbare Kardinalzahlen und Konsequenzen aus ihrer Existenz weiter untersucht. Mit der zusätzlichen Anforderung der Normalität an den Filter geht es darum weitere interessante Resultate zu beweisen.
Zunächst wird gezeigt, dass jede messbare Kardinalzahl auch ein normales Maß trägt. Daraus folgern wir, dass jede messbare Kardinalzahl eine Ramsey Kardinalzahl ist. Anschließend wird der Satz von Kunen bewiesen, wonach aus der Existenz einer nichttrivialen elementaren Einbettung von V in ein weiteres Modell der Mengenlehre M folgt, dass $V \neq M$. Dieses Theorem wird im letzten Teil des Vortrages herangezogen, um zu zeigen, dass in $L[D]$, wobei D ein normales Maß auf einer messbaren Kardinalzahl κ ist, GCH gilt und κ die einzige messbare Kardinalzahl in $L[D]$ ist.

Normale Maße.

Definition 1. Ein Filter F auf einer Kardinalzahl κ heißt normal, wenn er unter diagonalen Durchschnitten abgeschlossen ist, d.h.

Ist $\langle X_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle$ eine Familie von Elementen von F, so ist auch

$$\triangle_{\alpha<\kappa} = \{ \xi < \kappa \mid \xi \in \cap_{\alpha<\xi} X_\alpha \} \in F.$$

Wir nennen einen κ-vollständigen normalen Ultrafilter, der kein Hauptultrafilter ist ein *normales Maß* auf κ.

Lemma 2. Sei U ein Ultrafilter auf κ, so sind äquivalent:

(1) Für jede regressive Funktion $h : X \to \mathrm{Ord}$, wobei $X \in U$, existiert ein $Y \in U$ mit $h \restriction Y$ ist konstant.

(2) U ist normal.

LEMMA 3. Seien κ eine reguläre überabzählbare Kardinalzahl und F ein normaler Filter auf κ. Enthält F alle Endstücke $\{\alpha \mid \gamma<\alpha<\kappa\}$ für $\gamma < \kappa$ von κ, so auch alle club-Mengen.

LEMMA 4. Ist D ein normales Maß auf κ, so ist jede Menge aus D stationär.

Nun wird gezeigt, dass es auf jeder messbaren Kardinalzahl auch ein normales Maß gibt.

THEOREM 5. Ist U ein κ-vollständiger Ultrafilter auf κ, der kein Hauptultrafilter, so gibt es eine Funktion $f : \kappa \to \kappa$, so dass

$$f_*(U) := \{ X \subseteq \kappa \mid f^{-1}[X] \in U \}$$

ein normales Maß auf κ ist.

Folgendes Theorem verbindet die Inhalte der letzen beiden Vorträge.

THEOREM 6. Sei κ eine messbare Kardinalzahl und D ein normales Maß auf κ. Sei weiter F eine Partition von $[\kappa]^{<\omega}$ in weniger als κ Teile. Dann gibt es eine Menge $H \in D$, die homogen für F ist.
Also ist jede messbare Kardinalzahl eine Ramsey Kardinalzahl.

Der Satz von Kunen.

LEMMA 7. Sei κ eine überabzählbare Kardinalzahl mit $2^\lambda < \kappa$ für alle $\lambda < \kappa$. Dann ist $2^\lambda = \lambda^{\mathrm{cf}\lambda}$.

LEMMA 8. Sei λ eine unendliche Kardinalzahl mit $2^\lambda = \lambda^{\aleph_0}$. Dann gibt es ein Funktion $F : \lambda^\omega \to \lambda$, so dass es für jedes $A \subseteq \lambda$ mit $|A| = \lambda$ und jedes $\gamma < \lambda$ ein $s \in A^\omega$ gibt mit $F(s) = \gamma$.

THEOREM 9 (Satz von Kunen). Ist $j : V \to M$ eine nichttriviale elementare Einbettung, so ist $M \neq V$.

Relative Konstruktibilität.

DEFINITION 10. Betrachte die Sprache $\mathcal{L} = \{ \in, \dot{A} \}$, wobei $\dot{A}$ ein einstelliges Relationssymbol sei. Formalisiere die $\mathcal{L}$-Formeln in $\mathrm{Fmla}_{\dot{A}}$ und definiere die Modellbeziehung $\models_{\dot{A}}$, wie es bei $\mathcal{L}' = \{ \in \}$ durchgeführt wurde. Sei A eine Menge, so definiere

$$\begin{aligned}\mathrm{Def}_A(M) \;:=\; & \{ X \subseteq M \mid \exists\, \varphi \in \mathrm{Fmla}_{\dot{A}} \;\exists\, \vec{m} \in M \;\forall\, x \in M \\ & (\, x \in X \;\longleftrightarrow\; (M, \in, M \cap A) \models_{\dot{A}} \varphi[x, \vec{m}] \,) \}.\end{aligned}$$

Setze nun

$$L_0[A] = \emptyset, \qquad L_{\alpha+1}[A] = \mathrm{Def}_A(\, L_\alpha[A]\,), \qquad L_\lambda[A] = \bigcup_{\alpha<\lambda} L_\alpha[A] \text{ für } \mathrm{Lim}(\lambda)$$

und

$$L[A] = \bigcup_{\alpha\in\mathrm{Ord}} L_\alpha[A].$$

Satz 11. Ist $M \prec (\, L_\delta[A], \in, A \cap L_\delta[A]\,)$ mit $\mathrm{Lim}(\delta)$, so existiert ein $\gamma < \delta$, so dass

$$\pi : (\, M, \in, A \cap M\,) \xrightarrow{\cong} (\, L_\gamma[\bar{A}], \in, A \cap L_\gamma[\bar{A}]\,)$$

wobei π der Mostowski-Isomorphismus ist und $\bar{A} = \pi[A \cap M]$.

Lemma 12. Für $\bar{A} := A \cap L[A]$ gilt $L[A] = L[\bar{A}]$ und es ist $\bar{A} \in L[A]$.

Theorem 13. Sei A beliebige Menge, so gilt:

(i) $L[A]$ ist ZFC-Modell,

(ii) in $L[A]$ gilt $\exists X\,(\, V = L[X]\,)$.

Lemma 14. Ist $V = L[A]$ und $A \subseteq \mathcal{P}(\,\omega_\alpha)$, so gilt $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$.

Das Modell $L[U]$.

Sei κ eine messbare Kardinalzahl und U ein κ-vollständiger Ultrafilter auf κ, der kein Hauptultrafilter ist.
Betrachte im Folgenden das Modell $L[U] = L[\bar{U}]$, wobei $\bar{U} = U \cap L[U]$.

Lemma 15. In $L[U]$ ist $\bar{U}$ ein κ-vollständiger Ultrafilter auf κ, der kein Hauptultrafilter ist. Ist U normal, so in $L[U]$ auch $\bar{U}$.

Lemma 16. Sei $M = \mathrm{Ult}_U(V)$ und $j = j_U$ die kanonische elementare Einbettung von V in M. Dann gilt:

(i) Ist λ eine Limesordinalzahl und $\mathrm{cf}\lambda \neq \kappa$, so

$$j(\lambda) = \bigcup_{\alpha<\lambda} j(\alpha).$$

(ii) Ist $\lambda > \kappa$ und $2^\nu < \lambda$ für alle $\nu < \lambda$, sowie $\mathrm{cf}\lambda \neq \kappa$, so $j(\lambda) = \lambda$.

Theorem 17 (Silver). Ist $V = L[D]$ für ein normales Maß D auf einer messbaren Kardinalzahl κ, so gilt GCH.

Satz 18. Ist $V = L[D]$ für ein normales Maß D auf einer messbaren Kardinalzahl κ, so ist κ die einzige messbare Kardinalzahl.