Partition Cardinals

Dörthe Arndt

12. November 2007

Wir führen folgende Schreibweise ein:
Sei κ unendliche Kardinalzahl, α Limesordinalzahl, $\alpha \leq \kappa$, und sei m Kardinalzahl, $2 \leq m < \kappa$. Dann steht das Symbol:

$$\kappa \to (\alpha)_m^{<\omega}$$

für die Eigenschaft, dass jede Partition F einer Menge $[\kappa]^{<\omega} = \bigcup_{m=0}^{\infty}[\kappa]^n$ in m Teile, eine homogene Menge $H \subset \kappa$ vom Ordnungstyp α besitzt, so dass für jedes $n \in \omega$ F konstant auf $[H]^n$ ist. Analog dazu schreiben wir mit n natürliche Zahl

$$\kappa \to (\alpha)_m^n$$

für: Jede Partition $F : [\kappa]^n \to m$ ist konstant auf $[H]^n$ für ein $H \subset \kappa$ vom Ordnungstyp α

Sei $\mathfrak{A} = (A, P^{\mathfrak{A}}, ..., F^{\mathfrak{A}}, ..., c^{\mathfrak{A}}, ...)$ ein Modell für eine Sprache $\mathfrak{L} = \{P, ..., F, ..., c, ...\}$. Sei $\kappa \in Card$ und $\kappa \subset A$.

Definition 1 *Eine Menge $I \subset \kappa$ ist eine Menge von* Ununterscheidbaren *(indiscernibles) für das Modell $\mathfrak{A}$, wenn für jedes $n \in \omega$ und jede Formel $\varphi(v_1, ..., v_n)$ und für zwei beliebige aufsteigende Folgen $\alpha_1 < ... < \alpha_n$ und $\beta_1 < ... < \beta_n$ von Elementen in I gilt:*

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\alpha_1, ..., \alpha_n] \textit{ genau dann wenn } \mathfrak{A} \models \varphi[\beta_1, ..., \beta_n]$$

Lemma 1 *Sei κ eine unendliche Kardinalzahl und es gelte*

$$\kappa \to (\alpha)_{2^\lambda}^{<\omega}$$

mit α Limesordinalzahl, λ unendliche Kardinalzahl. Sei $\mathfrak{L}$ eine Sprache der Größe $\leq \lambda$ und sei $\mathfrak{A}$ ein Modell von $\mathfrak{L}$, so dass $\kappa \subset A$. Dann besitzt $\mathfrak{A}$ eine Menge von Ununterscheidbaren vom Ordnungstyp α.

Definition 2 *Eine Kardinalzahl $\kappa > \omega$ heißt* schwach kompakt*, wenn sie die Partitionseigenschaft $\kappa \to (\kappa)_2^2$ erfüllt.*

Definition 3 *Eine Kardinalzahl κ heißt Ramsey-Kardinalzahl, wenn $\kappa \to (\kappa)_2^{<\omega}$ gilt.*

Bemerkung: Aus der Definition folgt, dass jede Ramsey-Kardinalzahl schwach kompakt ist.

Lemma 2 *Wenn $\kappa \to (\kappa)^{<\omega}_2$ gilt und $\lambda < \kappa$ eine Kardinalzahl ist, so folgt $\kappa \to (\kappa)^{<\omega}_\lambda$.*

Man kann außerdem beweisen, dass jede schwach kompakte Kardinalzahl und damit auch jede Ramsey-Kardinalzahl unerreichbar ist. Damit folgt dann das Corollar:

Corallar 1 *Wenn κ eine Ramsey-Kardinalzahl ist und wenn $\mathfrak{A} \supset \kappa$ das Modell einer Sprache der Größe $< \kappa$ ist, dann besitzt $\mathfrak{A}$ eine Menge von Ununterscheidbaren der Größe κ.*

Satz 1 *(Rowbottom)*
Wenn κ eine Ramsey-Kardinalzahl ist und $\lambda < \kappa$, $\lambda \in Card$, dann gilt $|P^L(\lambda)| = \lambda$. Also ist dann die Menge der konstruktiblen Reellen Zahlen abzählbar.

Definition 4 *Für jede Limesordinalzahl α, ist die Erdös-Kardinalzahl η_α, das kleinste κ, so dass $\kappa \to (\alpha)^{<\omega}_2$ gilt.*

Lemma 3 *Aus $\kappa \to (\alpha)^{<\omega}_2$ folgt $\kappa \to (\alpha)^{<\omega}_{2^{\aleph_0}}$*

Lemma 4 *Für jedes $\kappa < \eta_\alpha$ gilt $\eta_\alpha \to (\alpha)^{<\omega}_\kappa$*

Lemma 5 *Für alle κ gilt: $2^\kappa \nrightarrow (\omega)^2_\kappa$*

Satz 2 *Jede Erdös-Kardinalzahl η_α ist unerreichbar, und aus $\alpha < \beta$ folgt $\eta_\alpha < \eta_\beta$.*

Definition 5 *Sei $\langle X_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$ eine Folge von Teilmengen von κ. Der* diagonale Durchschnitt *von X_α, $\alpha < \kappa$ ist definiert durch:*

$$\triangle_{\alpha<\kappa} X_\alpha = \{\xi < \kappa : \xi \in \cap_{\alpha<\xi} X_\alpha\}$$

Definition 6 *Sei F ein Filter auf einer Kardinalzahl κ. F ist* normal*, wenn F abgeschlossen ist unter diagonalen Schnitten:*

$$\text{wenn } X_\alpha \in F \text{ für alle } \alpha < \kappa, \text{ dann } \triangle_{\alpha<\kappa} X_\alpha \in F$$

Einen normalen κ-vollständigen Ultrafilter, der kein Hauptfilter ist, nennt man normales Maß *auf κ.*

Man kann beweisen, dass jede messbare Kardinalzahl ein normales Maß besitzt. Im nächsten Vortrag werden wir sehen, dass jede messbare Kardinalzahl Ramsey ist und dass ihre Homogene Menge H Element des normalen Maßes ist. Damit kann man nun folgendes Lemma zeigen:

Lemma 6 *Sei κ Ramsey-Kardinalzahl und $\lambda < \kappa$ unendliche Kardinalzahl. Sei $\mathfrak{A} = (A, ...)$ ein Modell einer Sprache $\mathfrak{L}$ so dass $|\mathfrak{L}| \leq \lambda$, und $A \supset \kappa$. Wenn $P \subset A$, so dass $|P| < \kappa$, dann besitzt $\mathfrak{A}$ ein elementares Submodell $\mathfrak{B} = (B, ...)$, so dass $|B| = \kappa$ und $|P \cap B| \leq \lambda$.*
Weiterhin gilt, wenn $X \subset A$ höchstens die Größe λ hat, findet man ein $\mathfrak{B}$ so dass $X \subset B$.
Außerdem findet man, wenn κ messbar und D ein normales Maß auf κ ist, ein $\mathfrak{B}$, so dass $B \cap \kappa \in D$.