Messbare Kardinalzahlen

Definition 0.1. Eine überabzählbare Kardinalzahl κ ist *messbar* wenn es einen κ-vollständigen Ultrafilter U auf κ gibt der kein Hauptfilter ist. (auch: nichtprinzipialer Ultrafilter)

Bemerkung. Ist U ein κ-vollständigen nichtprinzipialer Ultrafilter U auf κ, dann hat jede Menge $X \in U$ Kardinalität κ.

Lemma 0.2. *Jede messbare Kardinalzahl ist unerreichbar.*

Im folgenden werden wir eine Ultrapotenz des Universums konstruieren und mit dieser arbeiten. Sei U ein Ultrafilter auf einer Menge S. Wir betrachten die Klasse aller Funktionen von S ins Universum. Wie im letzten Vortrag definieren wir

$$f =^* g \text{ genau dann, wenn } \{x \in S : f(x) = g(x)\} \in U$$
$$f \in^* g \text{ genau dann, wenn } \{x \in S : f(x) \in g(x)\} \in U$$

Weiterhin sei die Äquivalenzklasse $[f]$ von f via $=^*$ definiert als

$$[f] = \{g : f =^* g \text{ und } \forall h\ (h =^* f \rightarrow \text{rank } g \leq \text{rank } h)\}$$

Zuletzt sei $[f] \in^* [g]$ wenn $f \in^* g$. Dies ist wohldefiniert, wie im letzten Vortrag gezeigt wurde.
Sei $Ult = Ult_U(V)$ die Klasse aller $[f]$, f eine Funktion von S. Wir werden das Modell $(Ult, \in^*)$ näher betrachten. Łoś's Theorem gilt auch in diesem Fall. Ist $\varphi(x_1, ..., x_n)$ eine Formel dann

$$Ult \models \varphi([f_1], ..., [f_n]) \text{ genau dann, wenn } \{x \in S : \varphi(f_1(x), ..., f_n(x))\} \in U$$

Ist σ ein Satz, dann gilt $Ult \models \sigma$ genau dann, wenn σ in V gilt. Ult und V sind *elementar äquivalent.* Für jede Menge a ist die konstante Funktion c_a definiert und die Funktion $j_U : V \rightarrow Ult$, definiert über $j_U(a) = [c_a]$ ist eine elementare Einbettung von V in Ult.

$$\varphi(a_1, ..., a_n) \text{ genau dann, wenn } Ult \models \varphi(j(a_1), ...j(a_n))$$

für alle Formeln $\varphi(x_1, ..., x_n)$ der Mengenlehre.
Wir wollen uns im Folgenden auf die stark fundierten Ultrapotenzen konzentrieren.

Definition 0.3. Das Modell $Ult_U(V)$ ist stark fundiert wenn:

i. Jede nicht leere Menge $X \subset Ult$ ein $\in^*$ minimales Element hat.

ii. $ext(f) = \{[g] : g \in^* f\}$ für alle f eine Menge ist.

Die zweite Bedingung gilt für jeden Ultrafilter U, da für jedes $g \in^* f$ ein $h =^* g$ existiert so dass rank $h \leq$ rank f.
Die erste Bedingung ist äquivalent dazu, dass es keine unendlich absteigende $\in^*$ Folge

$$f_0 \ni^* f_1 \ni^* ... \ni^* f_k \ni^* ...(k \in \omega)$$

von Elementen der Ultrapotenz gibt.

Lemma 0.4. *Sei U ein σ-vollständiger Ultrafilter. Dann ist $(Ult, \in^*)$ ein stark fundiertes Modell.*

Mit dem Mostowski Kollaps können wir jedes stark fundierte Modell isomorph auf ein transitives Modell abbilden. Ist also U σ-vollständig, dann gibt es eine bijektive Abbildung π von Ult in eine transitive Klasse M mit $f \in^* g$ genau dann, wenn $\pi([f]) \in \pi([g])$.
Für jeden σ-vollständigen Ultrafilter U erhalten wir also ein inneres Modell $M = \pi(Ult_U(V))$ und eine elementare Einbettung $j : V \to M$.
Ist α eine Ordinalzahl, dann ist $j(\alpha)$ ebenfalls eine Ordinalzahl, da j elementar ist. Außerdem gilt $j(\alpha + 1) = j(\alpha) + 1$, $j(0) = 0$ und $j(n) = n$ für alle natürlichen Zahlen n.

Lemma 0.5. *Die Einbettung erhält auch ω.*

Ist U λ-abgeschlossen können wir mit demselben Argument $j(\gamma) = \gamma$ für alle $\gamma < \lambda$ schließen.

Lemma 0.6. *Ist κ eine messbare Kardinalzahl und U ein nichtprinzipialer κ-vollständiger Ultrafilter auf κ dann gilt $j(\kappa) > \kappa$. für die oben definierte Einbettung.*

Wir haben hiermit gezeigt, dass aus der Existenz einer messbare Kardinalzahl die Existenz einer elementare Einbettung j des Universums in ein transitives Modell M folgt, so dass j nicht die Identität ist. j ist eine *nichttriviale elementare Einbettung des Universums.*

Theorem 0.7 (Scott)**.** *Wenn es eine messbare Kardinalzahl gibt, dann ist $V \neq L$*

Wir haben gezeigt, dass aus der Existenz einer messbaren Kardinalzahl die Existenz einer nicht trivialen elementaren Einbettung des Universums folgt. Die Umkehrung, nämlich das aus einer nicht trivialen elementaren Einbettung $j : V \to M$ die Existenz einer messbaren Kardinalzahl folgt, gilt ebenso.

Lemma 0.8. *Sei j eine nicht triviale elementare Einbettung des Universums, dann existiert eine messbare Kardinalzahl*

Lemma 0.9. *Sei $j : V \to M$ eine nicht triviale, elementare Einbettung, κ die kleinste Ordinalzahl mit $\kappa < j(\kappa)$ und D der in 0.8 definierte Ultrafilter auf κ. Sei außerdem $j_D : V \to Ult$ die kanonische Einbettung von V in die Ultrapotenz $Ult_D(V)$. Dann gibt es eine elementare Einbettung k von Ult in M, so dass $k(j_D(a)) = j(a)$ für alle a:*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "j"] \arrow[d, "j_D"'] & M \\ Ult \arrow[ur, "k"'] & \end{tikzcd}$$