Seminar zur Mengenlehre - Grosse Kardinalzahlen - WS 07

Models with Indiscernibles

Tim Fischbach (info@timfischbach.de)

26. November 2007

0 Vorbemerkungen

Wir betrachten ausschließlich Modelle $\mathfrak{A} = (A, E)$, die elementar äquivalent zu einem $(L_\lambda, \in)$, $\lambda \in lim$, sind.

Bemerkung 1. Die folgenden Begriffe übertragen sich von L_λ auf $\mathfrak{A}$:

- Für $\varphi \in Form$ bezeichne $h_\varphi^\mathfrak{A}$ die $\mathfrak{A}$-Interpretation der kanonischen Skolemfunktion. $h_\varphi^\mathfrak{A}$ ist definierbare Skolemfunktion für $\mathfrak{A}$.
- $H^\mathfrak{A}(X)$ bezeichne den Abschluss von X unter allen $h_\varphi^\mathfrak{A}$, $\varphi \in Form$, genannt die Skolemhülle von X in $\mathfrak{A}$. $H^\mathfrak{A}(X)$ ist das kleinste elementare Submodell von $\mathfrak{A}$ das X enthält.

Bemerkung 2.
- Die h_φ können in Termen und Formeln verwendet werden, da sie als definierbare Funktionen durch $\in$-Formeln ersetzt werden können.
- Die Wohlordnung $<_{L_\lambda}$ ist uniform definierbar in L_λ für alle $\lambda \in lim$. Daher gilt für Modelle $(\mathfrak{A}, E)$, $(\mathfrak{A}', E')$, elementar äquivalent zu $(L_\lambda, \in)$, $(L_{\lambda'}, \in)$, $\lambda, \lambda' \in lim$: Elementare Einbettungen $j : (\mathfrak{A}, E) \longrightarrow (\mathfrak{A}', E')$ bleiben bezüglich der erweiterten Sprache $\mathcal{L}^* = \{\in\} \cup \{h_\varphi \mid \varphi \in Form\}$ elementar: $h_\varphi^{\mathfrak{A}'}(j(x_1), \ldots, j(x_n)) = j(h_\varphi^\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_n))$.

1 Indiscernibles und E.M.-Mengen

Definition 1. Sei $\lambda \in lim$, $\mathfrak{A} = (A, E)$ Modell, elementar äquivalent zu $(L_\lambda, \in)$. $Ord^\mathfrak{A}$ wird duch E linear geordnet. Schreibe $x < y$ für $x\ E\ y$, $x, y \in Ord^\mathfrak{A}$.

a) Eine Menge $I \subset Ord^\mathfrak{A}$ heißt *Menge von Indiscernibles für* $\mathfrak{A}$ gdw für jede Formel φ und $x_1 < \ldots < x_n,\ y_1 < \ldots < y_n \in I$,
$$\mathfrak{A} \models \varphi[x_1, \ldots, x_n] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi[y_1, \ldots, y_n]$$

b) Sei I eine Menge von Indiscernibles für $\mathfrak{A}$. Definiere
$$\Sigma(\mathfrak{A}, I) := \{\varphi(v_1, \ldots, v_n) \in Form \mid \exists\ x_1 < \ldots < x_n \in I\ \mathfrak{A} \models \varphi[x_1, \ldots, x_n]\}.$$

c) $\Sigma \subset Form$ heißt *E.M.-Menge* (Ehrenfeucht-Mostowski) gdw es gibt ein Modell $\mathfrak{A}$, elementar äquivalent zu L_λ, für ein $\lambda \in lim$, und eine unendliche Menge von Indiscernibles I für $\mathfrak{A}$, so dass $\Sigma = \Sigma(\mathfrak{A}, I)$.

Lemma 1. *Sei Σ E.M.-Menge, $\alpha \in Ord$ unendlich. Dann existiert ein Modell $\mathfrak{A}$ und eine Menge von Indiscernibles I für $\mathfrak{A}$, so dass:*

1. $\Sigma = \Sigma(\mathfrak{A}, I)$,
2. $otp(I) = \alpha$,
3. $\mathfrak{A} = H^{\mathfrak{A}}(I)$.

$(\mathfrak{A}, I)$ ist bis auf Isomorphie eindeutig.

Beweis. Eindeutigkeit: Seien $(\mathfrak{A}, I)$, $(\mathfrak{B}, J)$ zwei Paare, die 1.-3. erfüllen. Da $otp(I) = otp(J)$, existiert Isomorphismus $\pi : I \longrightarrow J$. Wir erweitern π zu Isomorphismus $\tilde{\pi}$ von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$:

Da $\mathfrak{A} = H^{\mathfrak{A}}(I)$, existiert für jedes $a \in \mathfrak{A}$ ein Skolemterm $t(v_1, \ldots, v_n)$ mit $a = t^{\mathfrak{A}}[x_1, \ldots, x_n]$ für $x_1 < \ldots < x_n \in I$. Analog für $\mathfrak{B}$. Setze nun

$$\tilde{\pi}(t^{\mathfrak{A}}[x_1, \ldots, x_n]) = t^{\mathfrak{B}}[\pi(x_1), \ldots, \pi(x_n)] \tag{1}$$

für jeden Skolemterm $t(v_1, \ldots, v_n)$ und alle $x_1 < \ldots < x_n \in I$. Da $\Sigma(\mathfrak{A}, I) = \Sigma(\mathfrak{B}, J)$, gilt

$$\begin{aligned} t_1^{\mathfrak{A}}[x_1, \ldots, x_n] = t_2^{\mathfrak{A}}[y_1, \ldots, y_m] &\leftrightarrow t_1^{\mathfrak{B}}[\pi(x_1), \ldots, \pi(x_n)] = t_2^{\mathfrak{B}}[\pi(y_1), \ldots, \pi(y_m)], \\ t_1^{\mathfrak{A}}[x_1, \ldots, x_n]\ E^{\mathfrak{A}}\ t_2^{\mathfrak{A}}[y_1, \ldots, y_m] &\leftrightarrow t_1^{\mathfrak{B}}[\pi(x_1), \ldots, \pi(x_n)]\ E^{\mathfrak{B}}\ t_2^{\mathfrak{B}}[\pi(y_1), \ldots, \pi(y_m)] \end{aligned} \tag{2}$$

für Skolemterme $t_1(v_1, \ldots, v_n)$, $t_2(v_1, \ldots, v_m)$ und $x_1, \ldots, x_n,\ y_1, \ldots, y_m \in I$: Sei $z_1 < \ldots < z_{n+m}$ die Aufzählung von $\{x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m\}$ in aufsteigender Reihenfolge, $\varphi(v_1, \ldots, v_{n+m})$ eine Formel, so dass

$$\varphi[z_1, \ldots, z_{n+m}] \equiv (t_1[x_1, \ldots, x_n] = t_2[y_1, \ldots y_m]).$$

Dann gilt φ sowohl in $\mathfrak{A}$ als auch in $\mathfrak{B}$ genau dann, wenn $\varphi \in \Sigma$. Analog für den zweiten Teil von (2). Also ist $\tilde{\pi}$ durch (1) wohldefiniert und ein Isomorphismus zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, der π erweitert.

Existenz: Anwendung des Kompaktheitssatzes: Da Σ E.M.-Menge, existiert $(\mathfrak{A}_0, I_0)$ mit $\Sigma = \Sigma(\mathfrak{A}_0, I_0)$. Wir erweitern die Sprache $\{\in\}$ durch Konstantensymbole c_ξ, $\xi < \alpha$. Sei Δ die Menge der folgenden Sätze:

$$\begin{aligned} c_\xi \in Ord &\quad \text{(für alle } \xi < \alpha\text{)}, \\ c_\xi < c_\eta &\quad \text{(für alle } \xi < \eta < \alpha\text{)}, \\ \varphi(c_{\xi_1}, \ldots, c_{\xi_n}) &\quad \text{(für alle } \varphi \in \Sigma \text{ und alle } \xi_1 < \ldots < \xi_n < \alpha\text{)}. \end{aligned}$$

(1) Jedes endliche $D \subset \Delta$ besitzt ein Modell.

Beweis: Sei $D \subset \Delta$ endlich. Es gibt $\xi_1, \ldots, \xi_k < \alpha$, so dass $c_{\xi_1}, \ldots, c_{\xi_k}$ die einzigen in D auftretenden Konstanten sind. Sei $\sigma := \bigwedge D$. Da I_0 unendlich ist, können wir $i_1 < \ldots < i_k \in I_0$ wählen. Sei $\mathfrak{A}_0 = (A_0, E)$. Wir erweitern nun das Modell $\mathfrak{A}_0$ zu einem Modell $\mathfrak{A}_0'$, indem wir die Konstantensymbole $c_{\xi_1}, \ldots, c_{\xi_k}$ durch $i_1, \ldots, i_k$ interpretieren.

$\mathfrak{A}'_0 = (A_0, E, i_1, \ldots, i_k)$. Dann folgt aus $D \subset \Delta$ und $\Sigma = \Sigma(\mathfrak{A}_0, I_0)$: $\mathfrak{A}'_0 \models \sigma$. Also $\mathfrak{A}'_0 \models D$. qed(1)

Nach dem Kompaktheitssatz besitzt Δ ein Modell $\mathfrak{M} = (M, E, c_\xi^{\mathfrak{M}})_{\xi<\alpha}$. Sei $I := \{c_\xi^{\mathfrak{M}} \mid \xi < \alpha\}$. Es gilt $I \subset Ord^{\mathfrak{M}}$, $otp(I) = \alpha$. Für $\varphi(v_1, \ldots, v_n) \in Form$ und $\xi_1 < \ldots < \xi_n < \alpha$ gilt: $(M, E) \models \varphi[c_{\xi_1}^{\mathfrak{M}}, \ldots, c_{\xi_n}^{\mathfrak{M}}] \leftrightarrow \varphi \in \Sigma$. Also ist I eine Menge von Indiscernibles für (M, E). Sei $A := H^{(M,E)}(I)$. Da $\mathfrak{A} := (A, E)$ elementares Submodell von (M, E), ist I eine Menge von Indiscernibles für $\mathfrak{A}$, $\Sigma(\mathfrak{A}, I) = \Sigma$ und $H^{\mathfrak{A}}(I) = H^{(M,E)}(I) = A$. Also erfüllt $(\mathfrak{A}, I)$ 1.-3. □

Definition 2. Sei Σ E.M.-Menge, $\alpha \in Ord$ unendlich. Nenne das gemäß Lemma 1 eindeutig bestimmte Paar $(\mathfrak{A}, I)$ das (Σ, α)-*Modell*

Lemma 2. *Sei Σ E.M.-Menge, $\alpha < \beta$ und $j : \alpha \longrightarrow \beta$ ordnungserhaltend. Dann kann j zu elementarer Einbettung des (Σ, α)-Modells in das (Σ, β)-Modell erweitert werden.*

Beweis. Erweitere j wie in (1). □

Lemma 3. *Für eine E.M.-Menge Σ ist äquivalent:*

1. *Für jedes α, ist das (Σ, α)-Modell wohlfundiert.*
2. *Es gibt $\alpha \geq \omega_1$, so dass das (Σ, α)-Modell wohlfundiert ist.*
3. *Für jedes $\alpha < \omega_1$, ist das (Σ, α)-Modell wohlfundiert.*

Beweis. 1. ⇒ 2.: trivial

2. ⇒ 3.: Sei $(\mathfrak{A}, I)$ das (Σ, α)-Modell, $\beta \leq \alpha$, J das Anfangsstück der ersten β Elemente von I, $\mathfrak{B} := H^{\mathfrak{A}}(J)$. Dann ist $(\mathfrak{B}, J)$ das (Σ, β)-Modell. Submodelle wohlfundierter Modelle sind wohlfundiert. Ist also $\beta \leq \alpha$ und das (Σ, α)-Modell wohlfundiert, so ist auch das (Σ, β)-Modell wohlfundiert.

3. ⇒ 1.: Angenommen $\alpha \in lim$, so dass das (Σ, α)-Modell nicht wohlfundiert ist. Sei $(\mathfrak{A}, I)$ das (Σ, α)-Modell. Es gibt also eine unendliche absteigende Folge $a_0, a_1, a_2, \ldots$ in $\mathfrak{A}$, d.h. $\forall n \geq 0\ a_{n+1}\ E\ a_n$. Jedes a_n ist über I definierbar: Für jedes a_n existiert ein Skolemterm t mit $a_n = t[x_1, \ldots, x_n]$ für $x_1, \ldots, x_n \in I$. Es gibt $I_0 \subseteq I$ abzählbar mit $\forall n \geq 0\ a_n \in H^{\mathfrak{A}}(I_0)$, $otp(I_0) = \beta$ abzählbar. $(H^{\mathfrak{A}}(I_0), \beta)$ ist das (Σ, β)-Modell und nicht wohlfundiert, da es alle a_n enthält. Also existiert ein abzählbares β, so dass das (Σ, β)-Modell nicht wohlfundiert ist. □

2 Remarkability

Definition 3. Sei $\alpha \in lim$. Nenne das (Σ, α)-Modell $(\mathfrak{A}, I)$ *unbeschränkt* gdw I unbeschränkt in $Ord^{\mathfrak{A}}$, d.h. falls $\forall x \in Ord^{\mathfrak{A}}\ \exists\ y \in I\ x < y$.

Lemma 4. *Für E.M.-Mengen Σ ist äquivalent:*

1. *Für alle $\alpha \in lim$, ist das (Σ, α)-Modell unbeschränkt,*
2. *Es gibt $\alpha \in lim$, so dass das (Σ, α)-Modell unbeschränkt ist,*
3. *Für jeden Skolem-Term $t(v_1, \ldots, v_n)$ enthält Σ die Formel*

$$t(v_1, \ldots, v_n) \in Ord \to t(v_1, \ldots, v_n) < v_{n+1}. \tag{3}$$

Beweis. *1. $\Rightarrow$ 2.:* trivial.

2. $\Rightarrow$ 3.: Sei $(\mathfrak{A}, I)$ das (Σ, α)-Modell, $\alpha \in lim$, I unbeschränkt in $Ord^{\mathfrak{A}}$. Sei $t(v_1, \ldots, v_n)$ Skolemterm. Es genügt zu zeigen, dass (3) in $\mathfrak{A}$ für eine aufsteigende Folge $x_1 < \ldots < x_{n+1}$ in I erfüllt ist. Sei $x_1, \ldots, x_n \in I$, $y := t^{\mathfrak{A}}[x_1, \ldots, x_n]$. Falls $y \notin Ord^{\mathfrak{A}}$, dann ist (3) erfüllt. Sonst wähle gemäß Unbeschränktheit $x_{n+1} \in I$ mit $y < x_{n+1}$. Dann gilt $\mathfrak{A} \models t[x_1, \ldots, x_n] < x_{n+1}$.

3. $\Rightarrow$ 1.: Sei $(\mathfrak{A}, I)$ das (Σ, α)-Modell, $\alpha \in lim$. Sei $y \in Ord^{\mathfrak{A}}$, t Skolemterm, $x_1 < \ldots < x_n \in I$, so dass $y = t^{\mathfrak{A}}[x_1, \ldots, x_n]$. Sei $x_{n+1} \in I$ mit $x_{n+1} > x_n$. Dann folgt gemäß 3. $y < x_{n+1}$. □

Bemerkung 3. Wir nennen eine E.M.-Menge Σ daher *unbeschränkt* gdw Σ die Formeln (3) für alle Skolem-Terme t enthält.

Definition 4. Sei $\alpha \in lim$ mit $\alpha > \omega$, $(\mathfrak{A}, I)$ das (Σ, α)-Modell. Für jedes $\xi < \alpha$ bezeichne i_ξ das ξ-te Element von I. Nenne $(\mathfrak{A}, I)$ *remarkable* gdw $(\mathfrak{A}, I)$ unbeschränkt und $\forall x \in Ord^{\mathfrak{A}}\ x < i_\omega \to x \in H^{\mathfrak{A}}(\{i_n \mid n \in \omega\})$.

Lemma 5. *Für unbeschränkte E.M.-Menge Σ ist äquivalent:*

1. *Für jedes $\alpha \in lim$, $\alpha > \omega$ ist das (Σ, α)-Modell remarkable.*
2. *Es gibt $\alpha \in lim$, $\alpha > \omega$, so dass das (Σ, α)-Modell remarkable ist.*
3. *Für jeden Skolem-Term $t(v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots, y_{m+n})$ enthält Σ die Formel*

$$\begin{aligned} &t(v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots, v_{m+n}) \in Ord \ \wedge\ t(v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots, v_{m+n}) < v_1 \\ &\to t(v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots, v_{m+n}) = t(v_1, \ldots, v_m, v_{m+n+1}, \ldots, v_{m+2n}) \end{aligned} \tag{4}$$

Weiterhin, falls $(\mathfrak{A}, I)$ remarkable (Σ, α)-Modell, $\gamma \in lim$ mit $\gamma < \alpha$, dann $\forall x \in Ord^{\mathfrak{A}}\ x < i_\gamma \to x \in H^{\mathfrak{A}}(\{i_\xi \mid \xi < \gamma\})$.

Beweis. *1. $\Rightarrow$ 2.:* trivial.

2. $\Rightarrow$ 3.: Sei $\alpha > \omega$, $\alpha \in lim$, $(\mathfrak{A}, I)$ remarkable (Σ, α)-Modell. Sei $t(v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots, v_{m+n})$ Skolemterm. Es genügt zu zeigen, dass (4) in $\mathfrak{A}$ für eine aufsteigende Folge $x_1 < \ldots < x_m < y_1 < \ldots < y_n < z_1 < \ldots < z_n$ in I erfüllt ist. Wähle dazu Folge $x_1 < \ldots < x_m < y_1 < \ldots < y_n < z_1 < \ldots < z_n$, so dass $x_1, \ldots, x_m$ die ersten m Elemente von I sind und $y_1 = i_\omega$. Falls $a := t^{\mathfrak{A}}[x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots y_n] \in Ord^{\mathfrak{A}}$ und $a < y_1$, gilt, nach Remarkability von $(\mathfrak{A}, I)$, $a \in H^{\mathfrak{A}}(\{i_n \mid n < \omega\})$. Also exisitert ein $k < \omega$, $k \geq m$, und ein Skolemterm $s(v_1, \ldots, v_k)$ mit

$$\mathfrak{A} \models t[x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n] = s[i_0, \ldots, i_k]. \tag{5}$$

(5) besagt, dass $\mathfrak{A}$ eine Formel $\varphi[i_0, \ldots, i_k, y_1, \ldots, y_n]$ erfüllt. Wegen Ununterscheidbarkeit erfüllt $\mathfrak{A}$ dann auch die Formel $\varphi[i_0, \ldots, i_k, z_1, \ldots, z_n]$, d.h.

$$\mathfrak{A} \models t[x_1, \ldots, x_m, z_1, \ldots, z_n] = s[i_0, \ldots, i_k].$$

Also $t^{\mathfrak{A}}[x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n] = t^{\mathfrak{A}}[x_1, \ldots, x_m, z_1, \ldots, z_n]$.

3. ⇒ 1. und „Weiterhin“: Sei $(\mathfrak{A}, I)$ das (Σ, α)-Modell, wobei $\alpha \in lim$, $\alpha > \omega$. Sei $\gamma \in lim$, $\omega \leq \gamma < \alpha$, und $x \in Ord^{\mathfrak{A}}$, $x < i_\gamma$. Wir wollen $x \in H^{\mathfrak{A}}(\{i_\xi \mid \xi < \gamma\})$ zeigen. Da $\mathfrak{A} = H^{\mathfrak{A}}(I)$, gibt es einen Skolemterm $t(v_1, \ldots, v_{n+m})$ und $x_1 < \ldots < x_m < y_1 < \ldots < y_n \in I$, so dass $y_1 = i_\gamma$ und $x = t^{\mathfrak{A}}[x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n]$. Wähle $w_1, \ldots, w_n, z_1, \ldots, z_n \in I$ mit

$$x_1 < \ldots < x_m < w_1 < \ldots < w_n < y_1 < \ldots < y_n < z_1 < \ldots < z_n.$$

Da $x < y_1$, folgt aus (4)

$$\mathfrak{A} \models t[x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n] = t[x_1, \ldots, x_m, z_1, \ldots, z_n].$$

Gemäß Ununterscheidbarkeit gilt dann aber auch

$$\mathfrak{A} \models t[x_1, \ldots, x_m, w_1, \ldots, w_n] = t[x_1, \ldots, x_m, z_1, \ldots, z_n].$$

Also $x = t^{\mathfrak{A}}[x_1, \ldots, x_m, w_1, \ldots, w_n]$. Somit folgt $x \in H^{\mathfrak{A}}(\{i_\xi \mid \xi < \gamma\})$. □

Bemerkung 4. Wir nennen eine E.M.-Menge Σ daher *remarkable* gdw Σ unbeschränkt ist und die Formeln (4) für alle Skolem-Terme t enthält.

Korollar 1. *Sei $(\mathfrak{A}, I)$ ein remarkable (Σ, α)-Modell, $\gamma \in lim$ mit $\gamma < \alpha$. Sei $J := \{i_\xi \mid \xi < \gamma\}$, $\mathfrak{B} = H^{\mathfrak{A}}(J)$. Dann ist $(\mathfrak{B}, J)$ das (Σ, γ)-Modell und $Ord^{\mathfrak{B}}$ bildet ein Anfangsstück von $Ord^{\mathfrak{A}}$.*

Definition 5. Sei $(\mathfrak{A}, I)$ ein (Σ, α)-Modell. Nenne I *abgeschlossen in $Ord^{\mathfrak{A}}$* gdw für jedes $\gamma < \alpha$ mit $\gamma \in lim$, i_γ die kleinste obere Schranke von $\{i_\xi \mid \xi < \gamma\}$ in $Ord^{\mathfrak{A}}$ ist.

Lemma 6. *Wenn (Σ, α)-Modell $(\mathfrak{A}, I)$ remarkable, dann ist I abgeschlossen in $Ord^{\mathfrak{A}}$.*

Beweis. Sei $\gamma < \alpha$, $\gamma \in lim$, $x \in Ord^{\mathfrak{A}}$, $x < i_\gamma$. Nach Remarkability liegt x in (Σ, γ)-Modell $\mathfrak{B} = H^{\mathfrak{A}}(\{i_\xi \mid \xi < \gamma\})$. Da Σ unbeschränkt, $\mathfrak{B}$ unbeschränktes (Σ, γ)-Modell und es gibt $\xi < \gamma$ mit $x < i_\xi$. Also ist i_γ die kleinste obere Schranke von $\{i_\xi \mid \xi < \gamma\}$. □

Literatur

[1] *Set Theory, The Third Millenium Edition*, Thomas Jech (Springer, 2006), S. 313-318