Seminar zur Mengenlehre WS 2007/08
Prof. Dr. P. Koepke
Dr. B. Irrgang

Satz von Kunen und $L[U]$.

Karen Räsch

19.11.2007

Literatur. Jech, Thomas: Set Theory (Third Millenium Edition, revised and expanded). Springer, Berlin, 2002; S. 96, 134 ff., 192 f., 290 f., 339 f.

In diesem Vortrag werden messbare Kardinalzahlen und Konsequenzen aus ihrer Existenz weiter untersucht. Mit der zusätzlichen Anforderung der Normalität an den Filter können weitere interessante Resultate bewiesen werden.
Zunächst wird gezeigt, dass jede messbare Kardinalzahl auch ein normales Maß trägt. Daraus folgern wir, dass jede messbare Kardinalzahl eine Ramsey Kardinalzahl ist.
Anschließend wird ein Satz von Kunen bewiesen, wonach aus der Existenz einer nichttrivialen elementaren Einbettung von V in ein weiteres Modell der Mengenlehre M folgt, dass $V \neq M$. Dieses Theorem wird im letzten Teil des Vortrages herangezogen, um zu zeigen, dass in $L[U]$, wobei U ein normales Maß auf einer messbaren Kardinalzahl κ ist, GCH gilt und κ die einzige messbare Kardinalzahl in $L[U]$ ist.

Normale Maße.

Definition 1. Ein Filter F auf einer Kardinalzahl κ heißt normal, wenn er unter diagonalen Durchschnitten abgeschlossen ist, d.h.

Ist $\langle X_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle$ eine Folge von Elementen von F, so ist auch

$$\mathop{\triangle}_{\alpha<\kappa} X_\alpha = \{ \xi < \kappa \mid \xi \in \cap_{\alpha<\xi} X_\alpha \} \in F.$$

Wir nennen einen κ-vollständigen normalen Ultrafilter, der kein Hauptultrafilter ist ein *normales Maß* auf κ.

Lemma 2. Seien κ eine reguläre überabzählbare Kardinalzahl und F ein normaler Filter auf κ. Enthält F alle Endstücke $\{\alpha \mid \gamma{<}\alpha{<}\kappa\}$ für $\gamma < \kappa$ von κ, so auch alle club-Mengen.

Beweis. Zeige zunächst, dass $C_0 := \{\, \alpha < \kappa \mid \ \mathrm{Lim}(\alpha) \,\} \in F$. Betrachte dazu für jedes $\alpha < \kappa$ ein geeignet gewähltes Endstück $X_\alpha := \{\xi < \kappa \mid \alpha{+}1 < \xi\}$ von κ. Da vorausgesetzt ist, dass diese in F sind, ist

$$\begin{aligned} C_0 &= \{\, \xi < \kappa \mid \forall\, \alpha < \xi\, (\alpha + 1 < \xi\,) \,\} \\ &= \{\, \xi < \kappa \mid \xi \in \bigcap_{\alpha<\xi} X_\alpha \,\} \ = \ \mathop{\triangle}_{\alpha<\kappa} X_\alpha \ \in \ F. \end{aligned}$$

Sei nun C eine beliebige club-Menge und $C = \{\, c_\alpha \mid \ \alpha < \kappa \,\}$ eine strikt monotone Aufzählung. Betrachte wieder für jedes $\alpha < \kappa$ ein geeignetes Endstück $X_\alpha := \{\xi < \kappa \mid c_\alpha < \xi\}$ von κ. Diese sind in F, womit

$$\{\, \xi < \kappa \mid \forall\, \alpha < \xi\, (\, c_\alpha < \xi\,) \,\} \ = \ \{\, \xi < \kappa \mid \forall\, \alpha < \xi\, (\, \xi \in X_\alpha\,) \,\} \ = \ \mathop{\triangle}_{\alpha<\kappa} X_\alpha \ \in \ F$$

folgt. Da $C \ \supseteq \ \{\, \xi < \kappa \mid \ \forall\, \alpha < \xi\, (\, c_\alpha < \xi\,) \ \wedge \ \mathrm{Lim}(\xi) \,\} \ = \ \triangle_{\alpha<\kappa} X_\alpha \cap C_0$ ist, gilt also $C \in F$. □

Korollar 3. Ist U ein normales Maß auf κ, so ist jede Menge aus U stationär.

Beweis. Da U ein Ultrafilter ist und alle Mengen aus U die Größe κ haben, enthält U alle Endstücke von κ. Die Behauptung folgt damit unmittelbar aus Lemma 2. □

Lemma 4. Sei U ein Ultrafilter auf κ, der kein Hauptultrafilter ist. Dann sind äquivalent:

(1) Ist $X \in U$ und $h : X \to \mathrm{Ord}$ eine regressive Funktion, d.h. für alle $\alpha \in X$ ist $h(\alpha) < \alpha$, so existiert ein $Y \in U$ mit $h \restriction Y$ ist konstant.

(2) U ist normal.

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2). Angenommen nicht, so existiert eine Folge $\langle\, X_\alpha \mid \alpha < \kappa \,\rangle$ in U mit $\triangle_{\alpha<\kappa} X_\alpha \notin U$. Betrachte dann

$$X' \ := \ \kappa \setminus \mathop{\triangle}_{\alpha<\kappa} X_\alpha \ = \ \{\, \xi < \kappa \mid \exists\, \alpha < \xi\, (\, \xi \notin X_\alpha\,) \,\} \ \in \ U$$

und die regressive Funktion

$$h :\, X' \ \to \ \mathrm{Ord}, \quad \xi \ \mapsto \ \min\{\, \alpha < \xi \mid \xi \notin X_\alpha \,\}.$$

Also existiert $Y \in U$ mit $h \restriction Y$ ist konstant einem $\gamma < \kappa$. Daraus folgt $\varnothing = Y \cap X_\gamma \in U$, ein Widerspruch.

(2) $\Rightarrow$ (1). Angenommen nicht, so gibt es ein $X \in U$ und $h : X \to \mathrm{Ord}$ regressiv, so dass für alle $\alpha < \kappa$ die Menge $\{\xi \in X \mid h(\xi) = \alpha\} \notin U$. Setze dann $X_\alpha := \{\xi \in X \mid h(\xi) \neq \alpha\} \in U$. Aus der Normalität von U ergibt sich folgender Widerspruch

$$\begin{aligned}\{0\} &= \{\, \xi \in X \mid h(\xi) \geq \xi \,\} \cup \{0\} = \{\, \xi \in X \mid \forall \alpha < \xi \,(\, h(\xi) \neq \alpha \,)\,\} \cup \{0\} \\ &= \{\, \xi < \kappa \mid \forall \alpha < \xi \,(\, \xi \in X_\alpha \,)\,\} = \mathop{\triangle}_{\alpha<\kappa} X_\alpha \in U. \end{aligned}$$ $\square$

Nun wird gezeigt, dass es auf jeder messbaren Kardinalzahl auch ein normales Maß gibt.

Theorem 5. Ist U ein κ-vollständiger Ultrafilter auf κ, der kein Hauptultrafilter, so gibt es eine Funktion $f : \kappa \to \kappa$, so dass

$$f_*(U) := \{\, X \subseteq \kappa \mid f^{-1}[X] \in U \,\}$$

ein normales Maß auf κ ist.

Beweis. Sei U ein κ-vollständiger Ultrafilter auf κ, der kein Hauptultrafilter ist. Betrachte $\mathrm{Ult}_U(\kappa) = {}^\kappa\kappa/_{=U}$ mit $f <_U g$ genau dann, wenn $\{\, \alpha < \kappa \mid f(\alpha) < g(\alpha) \,\} \in U$. Es wird durch $<_U$ eine Wohlordnung auf $\mathrm{Ult}_U(\kappa)$ definiert.
Wähle nun $f \in {}^\kappa\kappa$, so dass $[f\,]_{=U}$ minimal bezüglich $<_U$ ist mit der Eigenschaft

$$\forall \gamma < \kappa \quad (\, \{\, \alpha < \kappa \mid f(\alpha) > \gamma \,\} \in U \,).$$

Die Existenz ist gesichert, da die Identität diese Eigenschaft erfüllt. Definiere

$$D := f_*(U) = \{\, X \subseteq \kappa \mid f^{-1}[X] \in U \,\}$$

und zeige, dass dies ein normales Maß auf κ definiert:

(1) D ist ein Filter. Offenbar ist $\kappa \in D$ und $\varnothing \notin D$. Sind $X, Y \in D$, so $f^{-1}[X \cap Y] = f^{-1}[X] \cap f^{-1}[Y] \in U$, also $X \cap Y \in D$. Weiterhin ist für $X \in D$ und $Y \subseteq \kappa$ mit $X \subseteq Y$ auch $Y \in D$, da $f^{-1}[Y] \supseteq f^{-1}[X] \in U$ und U unter Obermengen abgeschlossen ist.

(2) D ist ein Ultrafilter. Für jedes $X \subseteq \kappa$ gilt

$$\kappa = f^{-1}[\, X \cup (\, \kappa \setminus X \,)\,] = f^{-1}[\, X\,] \cup f^{-1}[\, \kappa \setminus X\,] = f^{-1}[\, X\,] \cup (\, \kappa \setminus f^{-1}[\, X\,]\,),$$

womit $X \in D$ oder $\kappa \setminus X \in D$ folgt.

(3) D ist κ-vollständig. Sei für ein $\gamma < \kappa$ eine Folge $\langle\, X_\alpha \mid \alpha < \gamma \,\rangle$ in D gegeben. Dann ist $f^{-1}[\bigcap_{\alpha<\gamma} X_\alpha] = \bigcap_{\alpha<\gamma} f^{-1}[\, X_\alpha\,] \in U$ also $\bigcap_{\alpha<\gamma} X_\alpha \in D$.

(4) D ist kein Hauptultrafilter. Sei $\gamma < \kappa$, so

$$f^{-1}[\,\{\gamma\}\,] = \{\, \alpha < \kappa \mid f(\alpha) = \gamma \,\} \notin U$$

nach der Wahl von f. Also $\{\gamma\} \notin D$.

(5) D ist normal. Benutze die Charakterisierung aus Lemma 4. Seien $X \in D$ und eine regressive Funktion $h : X \to \mathrm{Ord}$ gegeben. Betrachte

$$g : \kappa \;\to\; \mathrm{Ord}, \quad \alpha \;\mapsto\; \begin{cases} h(f(\alpha)) & \text{falls } \alpha \in f^{-1}[X] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da $[g]_{=U} <_U [f]_{=U}$ ist, existiert nach Wahl von f ein $\gamma < \kappa$ mit $\{\, \alpha < \kappa \mid g(\alpha) > \gamma \,\} \notin U$. Wähle γ mit dieser Eigenschaft minimal, so ist wegen

$$\bigcap_{\xi < \gamma} \{\, \alpha < \kappa \mid \; g(\alpha) > \xi \,\} \;=\; \{\, \alpha < \kappa \mid \; g(\alpha) \geq \gamma \,\} \;\in\; U$$

die Menge $\{\, \alpha < \kappa \mid \; g(\alpha) = \gamma \,\} \in U$. Damit auch $Z := f^{-1}[X] \cap \{\, \alpha < \kappa \mid \; g(\alpha) = \gamma \,\} \in U$ und h auf $f[Z]$ konstant. Aus $f^{-1}[\, f[Z]\,] \supseteq Z \in U$ ergibt sich, dass $f[Z] \in D$. □

Satz 6. Ist U ein normales Maß auf einer messbaren Kardinalzahl κ, so ist

(1) $\quad \mathrm{Reg} := \{\, \alpha < \kappa \mid \mathrm{Lim}(\alpha) \text{ und } \alpha \text{ regulär} \,\} \;\in\; U.$

(2) $\quad \{\, \alpha < \kappa \mid \mathrm{Card}(\alpha) \text{ und } \alpha \text{ unerreichbar} \,\} \;\in\; U.$

Beweis. zu (1). Angenommen nicht, so ist $\{\, \alpha < \kappa \mid \mathrm{Lim}(\alpha) \text{ und } \mathrm{cf}(\alpha) < \alpha \,\} \in U$, worauf dann cf eine regressive Funktion definiert. Also existiert nach Lemma 4 ein $\gamma < \kappa$ mit

$$E := \{\, \alpha < \kappa \mid \mathrm{Lim}(\alpha) \text{ und } \mathrm{cf}(\alpha) = \gamma \,\} \;\in\; U.$$

Wähle für jedes solche α eine monoton wachsende Folge $\langle\, \eta^\alpha_\xi \mid \xi < \gamma \,\rangle$ mit Limes α. Definiere für jedes $\xi < \gamma$ eine regressive Funktion durch

$$h_\xi : \; E \;\to\; \mathrm{Ord}, \quad \alpha \;\mapsto\; \eta^\alpha_\xi$$

und wähle $A_\xi \in U$ sowie $\nu_\xi < \kappa$, so dass $h_\xi \restriction A_\xi$ konstant ν_ξ ist. Es ist $A := \bigcap_{\xi<\gamma} A_\xi \in U$ und für alle $\alpha \in A$ gilt

$$\alpha \;=\; \bigcup_{\xi<\gamma} \eta^\alpha_\xi \;=\; \bigcup_{\xi<\gamma} h_\xi(\alpha) \;=\; \bigcup_{\xi<\gamma} \nu_\xi.$$

Aber damit wäre $\{\, \bigcup_{\xi<\gamma} \nu_\xi \,\} = A \in U$ und im Widerspruch zu den Voraussetzungen des Satzes U ein Hauptultrafilter.
zu (2). Aus der Unerreichbarkeit von κ folgt, dass $\{\, \alpha < \kappa \mid \; \mathrm{Card}(\alpha) \wedge \forall \gamma < \alpha \; (\, 2^\gamma < \alpha \,) \}$ club in κ und damit nach Lemma 2 in U ist. Also erhalten wir mit (1)

$$\{\, \alpha < \kappa \mid \mathrm{Card}(\alpha) \text{ und } \alpha \text{ unerreichbar} \,\} \;\in\; U.$$ □

Theorem 7. Sei κ eine messbare Kardinalzahl und U ein normales Maß auf κ. Sei weiter F eine Partition von $[\kappa]^{<\omega}$ in weniger als κ Teile. Dann gibt es eine Menge $H \in U$, die homogen für F ist.
Also ist jede messbare Kardinalzahl eine Ramsey Kardinalzahl.

Beweis. Seien U ein normales Maß auf einer messbaren Kardinalzahl κ und F eine Partition $F\colon [\kappa]^{<\omega} \to \lambda$ für ein $\lambda < \kappa$. Es genügt zu zeigen, dass es für jedes $n < \omega$, $n \neq 0$, eine Menge $H_n \in U$ gibt, so dass F auf $[H_n]^n$ konstant ist. Die homogene Menge für F ist dann

$$H := \bigcap \{ H_n \mid 0 < n < \omega \} \in U.$$

Zeige induktiv, dass für jede Partition $F\colon [\kappa]^n \to \lambda$ für ein $\lambda < \kappa$ ein $H \in U$ existiert, so dass $F \restriction [H]^n$ konstant ist.

$n = 1$. Da für jedes $F\colon \kappa \to \lambda$ mit $\lambda < \kappa$ gilt $\bigcap_{\alpha<\lambda} (\kappa \setminus F^{-1}[\{\alpha\}]) = \varnothing \notin U$, gibt es mindestens ein $\xi < \lambda$ mit $F^{-1}[\{\xi\}] \in U$.

$n \rightsquigarrow n + 1$. Sei $F\colon [\kappa]^{n+1} \to \lambda$ für ein $\lambda < \kappa$ gegeben. Definiere für jedes $\alpha < \kappa$

$$F_\alpha : [\kappa]^n \to \lambda, \quad x \mapsto \begin{cases} F(x \cup \{\alpha\}) & \text{falls } \alpha \notin x \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nach Induktionsvoraussetzung existiert für alle $\alpha < \kappa$ ein $X_\alpha \in U$, so dass $F_\alpha \restriction [X_\alpha]^n$ konstant ist. Bezeichne mit ξ_α den angenommenen Wert. Für beliebige $\gamma < \alpha_1 < \ldots < \alpha_n$ aus $X := \triangle_{\alpha<\kappa} X_\alpha \in U$ gilt $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \in [X_\gamma]^n$ und damit

$$F(\{\gamma, \alpha_1, \ldots, \alpha_n\}) = F_\gamma(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}) = \xi_\gamma.$$

Definiere eine weitere Partition

$$G : \kappa \to \lambda, \quad \gamma \mapsto \begin{cases} \xi_\gamma & \text{falls } \gamma \in X \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wie schon beim Induktionsanfang begründet, gibt es ein $H' \in U$ und ein $\xi < \lambda$, so dass $G \restriction H'$ konstant ξ ist. Setze $H := H' \cap X$, so ist $H \in U$ und für alle $x = \{\gamma, \alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \in [H]^{n+1}$, wobei γ das kleinste Element von x sei, gilt $F(x) = \xi_\gamma = \xi$. □

Satz von Kunen.

Lemma 8. Sei λ eine überabzählbare Kardinalzahl mit $2^\kappa < \lambda$ für alle $\kappa < \lambda$. Dann ist $2^\lambda = \lambda^{\mathrm{cf}\lambda}$.

Beweis. $(\geq)$ Offenbar ist ${}^{\mathrm{cf}(\lambda)}\lambda \subseteq \mathcal{P}(\lambda \times \lambda)$ und damit $\lambda^{\mathrm{cf}(\lambda)} \leq | \mathcal{P}(\lambda \times \lambda) | = 2^\lambda$.

($\leq$) Sei $\gamma = \mathrm{cf}(\lambda)$ und $\langle\, \kappa_\alpha \mid \alpha < \gamma \,\rangle$ konfinal in λ. Definiere

$$f : {}^{\lambda}2 \;\to\; \prod_{\alpha<\gamma} {}^{\kappa_\alpha}2, \quad g \;\mapsto\; f(g) \;\text{ mit }\; f(g)(\alpha) = g \restriction \kappa_\alpha.$$

Da f injektiv ist, folgt $2^\lambda \leq \prod_{\alpha<\gamma} 2^{\kappa_\alpha} \leq \prod_{\alpha<\gamma} \lambda = \lambda^{\mathrm{cf}(\lambda)}$. □

Lemma 9. Sei λ eine unendliche Kardinalzahl mit $2^\lambda = \lambda^{\aleph_0}$. Dann gibt es eine Funktion $F : {}^{\omega}\lambda \to \lambda$, so dass es für jedes $A \subseteq \lambda$ mit $|A| = \lambda$ und jedes $\gamma < \lambda$ ein $s \in {}^{\omega}A$ gibt mit $F(s) = \gamma$.

Beweis. Sei $\{\, (A_\alpha, \gamma_\alpha) \mid \alpha < 2^\lambda \,\}$ eine Aufzählung aller Paare (A, γ) mit $\gamma < \lambda$ und $A \subseteq \lambda$, $|A| = \lambda$. Definiere induktiv über α eine Folge $\langle\, s_\alpha \mid \alpha < 2^\lambda \,\rangle$ in ${}^{\omega}\lambda$ wie folgt:

> Sei $\alpha < 2^\lambda$ und für alle $\beta < \alpha$ sei s_β definiert. Wegen $|\alpha| < 2^\lambda = \lambda^{\aleph_0} = |{}^{\omega}A_\alpha|$, kann $s_\alpha \in {}^{\omega}A_\alpha$ mit $s_\alpha \neq s_\beta$ für alle $\beta < \alpha$ gewählt werden.

Definiere nun

$$F : {}^{\omega}\lambda \;\to\; \lambda, \quad s \;\mapsto\; \begin{cases} \gamma_\alpha & \text{für } s = s_\alpha \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für jedes Paar $(A, \gamma) = (A_\alpha, \gamma_\alpha)$ mit $\gamma < \lambda$ und $A \subseteq \lambda$, $|A| = \lambda$ ist $s_\alpha \in {}^{\omega}A$ und $F(s_\alpha) = \gamma$. □

Theorem 10 (Satz von Kunen). Ist $j : V \to M$ eine nichttriviale elementare Einbettung, so ist $M \neq V$.

Beweis. Es sei ι ein zweistelliges Prädikat mit der Interpretation j. Weiterhin sollen für alle Formeln in der Sprache $\{\in, \iota\}$ Aussonderung und Ersetzung in V gelten.
Angenommen $M = V$. Es bezeichne κ_0 den kritischen Punkt von j. Dann ist κ_0 eine messbare Kardinalzahl, wie in Lemma 0.8. im zweiten Vortrag „Messbare Kardinalzahlen" gezeigt wurde.
Definiere für $n < \omega$ induktiv $\kappa_{n+1} := j(\kappa_n)$. Da j elementar ist, sind dies messbare Kardinalzahlen, also insbesondere unerreichbar. Setze $\lambda := \bigcup_{n<\omega} \kappa_n$, so ist

$$j(\lambda) = \bigcup_{n<j(\omega)} j(\kappa_n) = \bigcup_{n<\omega} \kappa_{n+1} = \lambda.$$

Lemma 8 liefert $2^\lambda = \lambda^{\mathrm{cf}(\lambda)} = \lambda^{\aleph_0}$ und nach Lemma 9 existiert eine Funktion $F : {}^{\omega}\lambda \to \lambda$, so dass es für jedes $A \subseteq \lambda$ mit $|A| = \lambda$ gilt $F[{}^{\omega}A] = \lambda$. Aus der Elementarität von j folgt $j(F)[{}^{\omega}A] = j(\lambda) = \lambda$.
Setze $G := j[\lambda]$ und wähle $s \in {}^{\omega}G$, so dass $j(F)(s) = \kappa_0$. Wähle weiter eine Abbildung $t : \omega \to \lambda$ mit $j(t(n)) = s(n)$ für alle $n < \omega$. Damit ist $s = j(t)$, also insgesamt

$$\kappa_0 = j(F)(j(t)) = j(F(t)).$$

Aber dann kann κ_0 nicht der kritische Punkt von j sein, ein Widerspruch. □

Relative Konstruktibilität.

Definition 11. Betrachte die Sprache $\mathcal{L} = \{ \in, \dot{A} \}$, wobei $\dot{A}$ ein einstelliges Relationssymbol sei. Formalisiere die $\mathcal{L}$-Formeln in $\mathrm{Fmla}_{\dot{A}}$ und definiere die Modellbeziehung $\models_{\dot{A}}$, wie es bei $\mathcal{L}' = \{ \in \}$ durchgeführt wurde. Sei A eine Menge, so definiere

$$\begin{aligned} \mathrm{Def}_A(M) \;:=\; & \{ X \subseteq M \mid \exists\, \varphi \in \mathrm{Fmla}_{\dot{A}} \;\exists\, \vec{m} \in M \;\forall\, x \in M \\ & \quad (\, x \in X \;\longleftrightarrow\; (M, \in, M \cap A) \models_{\dot{A}} \varphi[x, \vec{m}]\,)\, \}. \end{aligned}$$

Setze nun

$$L_0[A] = \emptyset, \qquad L_{\alpha+1}[A] = \mathrm{Def}_A(\, L_\alpha[A]\,), \qquad L_\lambda[A] = \bigcup_{\alpha<\lambda} L_\alpha[A] \text{ für } \mathrm{Lim}(\lambda)$$

und

$$L[A] = \bigcup_{\alpha\in\mathrm{Ord}} L_\alpha[A].$$

Analog zum Beweis in L zeigt man auch für $L[A]$ einen Kondensationssatz.

Satz 12. Ist $M \prec (\, L_\delta[A], \in, A \cap L_\delta[A]\,)$ mit $\mathrm{Lim}(\delta)$, so existiert ein $\gamma < \delta$, so dass

$$\pi : (\, M, \in, A \cap M\,) \xrightarrow{\cong} (\, L_\gamma[\bar{A}], \in, A \cap L_\gamma[\bar{A}]\,)$$

wobei π der Mostowski-Isomorphismus ist und $\bar{A} = \pi[A \cap M]$.

Lemma 13. Für $\bar{A} := A \cap L[A]$ gilt $L[A] = L[\bar{A}]$ und es ist $\bar{A} \in L[A]$.

Beweis. Wir zeigen induktiv $L_\alpha[\bar{A}] = L_\alpha[A]$, womit auch $L[\bar{A}] = L[A]$ gilt.

$\alpha = 0$. Gilt per Definition.

$\alpha \rightsquigarrow \alpha+1$. Es ist $A \cap L_\alpha[A] = L[A] \cap A \cap L_\alpha[A] = \bar{A} \cap L_\alpha[A]$, also gilt wegen $\mathrm{Def}_A(\, L_\alpha[A]\,) = \mathrm{Def}_{A \cap L_\alpha[A]}(\, L_\alpha[A]\,)$

$$L_{\alpha+1}[A] = \mathrm{Def}_{\bar{A} \cap L_\alpha[A]}(\, L_\alpha[A]\,) \stackrel{IV}{=} \mathrm{Def}_{\bar{A} \cap L_\alpha[\bar{A}]}(\, L_\alpha[\bar{A}]\,) = L_{\alpha+1}[\bar{A}].$$

$\mathrm{Lim}(\alpha)$. Folgt unmittelbar aus der Induktionsvoraussetzung.

Da $F : A \cap L[A] \to \mathrm{Ord},\; a \mapsto \min\{ \alpha \mid a \in L_\alpha[A] \}$ durch eine Formel $\varphi \in \mathrm{Fmla}_{\dot{A}}$ beschrieben wird, ist $F[\, A \cap L[A]\,]$ in V eine Menge, also in Ord beschränkt. Damit existiert ein α, so dass $A \cap L_\alpha[A] = A \cap L[A]$, woraus $\bar{A} \in L_{\alpha+1}[A] \subseteq L[A]$ folgt. □

Bemerkung 14. Genauso zeigt man auch für beliebiges $N \subseteq L[A]$, dass für alle γ mit $L_\gamma[A \cap N] \subseteq N$ gilt $L_\gamma[A \cap N] = L_\gamma[A]$.

Mit Lemma 13 kann man ähnlich zu den Beweisen in L das folgende Theorem zeigen.

Theorem 15. Sei A beliebige Menge, so gilt:

(i) $L[A]$ ist ZFC-Modell.

(ii) In $L[A]$ gilt $\exists X\,(V = L[X])$.

Bemerkung 16. Damit ist ohne Einschränkung immer $A \in L[A]$.

In L gilt GCH. Die entsprechende Aussage für $L[A]$ ist im nächsten Satz formuliert.

Satz 17. Ist $V = L[A]$ und $A \subseteq \mathcal{P}(\omega_\alpha)$, so gilt $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$.

Beweis. Sei $X \subseteq \omega_\alpha$ und $\lambda \in \mathrm{Card}$ mit $\omega_\alpha \leq \lambda$, $A \in L_\lambda[A]$ und $X \in L_\lambda[A]$. Sei weiter $M \prec (L_\lambda[A], \in)$ mit $\omega_\alpha \subseteq M$, $A \in M$, $X \in M$ und $|M| = \aleph_\alpha$ (Skolemhülle). Es bezeichne $\pi : M \xrightarrow{\cong} N$ den Mostowski-Isomorphismus. Aus $\pi \restriction \omega_\alpha = \mathrm{id} \restriction \omega_\alpha$ folgt $\pi(X) = X$ und $\pi[A \cap M] = A \cap N$. Nach Satz 12 gibt es ein γ mit $N = L_\gamma[A \cap N]$ und mit Bemerkung 14 also $N = L_\gamma[A]$. Mit $|N| = \aleph_\alpha$ ergibt sich $\gamma < \aleph_{\alpha+1}$ und damit $X \in L_{\omega_{\alpha+1}}[A]$. Insgesamt ist jede Teilmenge von ω_α ein Element von $L_{\omega_{\alpha+1}}[A]$, also $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$. $\square$

Das Modell $L[U]$.

Sei κ eine messbare Kardinalzahl und U ein κ-vollständiger Ultrafilter auf κ, der kein Hauptultrafilter ist.
Betrachte im Folgenden das Modell $L[U] = L[\bar{U}]$, wobei $\bar{U} = U \cap L[U]$.

Lemma 18. In $L[U]$ ist $\bar{U}$ ein κ-vollständiger Ultrafilter auf κ, der kein Hauptultrafilter ist. Ist U normal, so in $L[U]$ auch $\bar{U}$.

Beweis. Zeige nacheinander die behaupteten Eigenschaften in $L[U]$:

(1) $\bar{U}$ ist ein Filter. Offensichtlich ist $\kappa \in \bar{U}$ und $\varnothing \notin \bar{U}$. Sind $X, Y \in \bar{U}$, so auch $X \cap Y \in \bar{U}$. Außerdem ist für $X \in \bar{U}$ und $Y \in L[U]$ mit $X \subseteq Y$ auch $Y \in \bar{U}$.

(2) $\bar{U}$ ist ein Ultrafilter. Sei $X \subseteq \kappa$ und $X \in L[U]$. Ist $X \notin \bar{U}$, so gilt $X \notin U$. Also erhalten wir $\kappa \setminus X \in U \cap L[U] = \bar{U}$.

(3) $\bar{U}$ ist κ-vollständig. Sei für ein $\gamma < \kappa$ eine Folge $\langle X_\alpha \mid \alpha < \gamma \rangle \in L[U]$ mit Elementen aus $\bar{U}$ gegeben. Dann ist offenbar $\bigcap_{\alpha<\gamma} X_\alpha \in \bar{U}$.

(4) $\bar{U}$ ist kein Hauptultrafilter. Sei $\alpha < \kappa$, so $\kappa \setminus \{\alpha\} \in \bar{U}$.

(5) $\bar{U}$ ist normal in $L[U]$, falls U in V normal ist. Seien $X \in \bar{U}$ und eine regressive Funktion $h : X \to \mathrm{Ord} \in L[U]$ gegeben. Dann existiert ein $\gamma < \kappa$ mit $Y = \{\, \alpha < \kappa \mid h(\alpha) = \gamma \,\} \in U$ in V. Mit $Y \in L[U]$ erhalten wir, dass h in $L[U]$ konstant auf $Y \in \bar{U}$ ist. $\square$

Bemerkung 19. Im nächsten Satz wird die vollständige Aussage von Lemma 6 aus dem dritten Vortrag „Partition Cardinals“ verwendet. Der Beweis, welcher vorgetragen wurde, kann durch Theorem 7 zu einem Beweis der vollständigen Aussage ergänzt werden.

Theorem 20 (Silver). Ist $V = L[U]$ für ein normales Maß U auf einer messbaren Kardinalzahl κ, so gilt GCH.

Beweis. Ist $\lambda \geq \kappa$, so $U \subseteq \mathcal{P}(\lambda)$ und nach Lemma 17 gilt $2^\lambda = \lambda^+$.

Sei nun $\lambda < \kappa$. Angenommen es gibt mehr als λ^+ Teilmengen von λ, so sei X die λ^+-te Teilmenge von λ bezüglich $<_{L[U]}$. Sei weiter α minimal mit $X \in L_\alpha[U]$. Dann ist jedes $Y \subseteq \lambda$ mit $Y <_{L[U]} X$ auch in $L_\alpha[U]$ oder anders ausgedrückt $|\,\mathcal{P}(\lambda) \cap L_\alpha[\,U\,]\,| \;\geq\; \lambda^+$.

Wir wollen nun Lemma 6 aus dem dritten Vortrag „Partition Cardinals“ anwenden. Wähle dazu $\eta \in \text{Card}$, $\eta > \alpha$ mit $U \in L_\eta[U]$ und betrachte $\mathfrak{A} = (L_\eta[U], \in)$. Es ist $\kappa \subseteq L_\eta[U]$. Betrachte $P := \mathcal{P}(\lambda) \cap L_\eta[U]$, welches wegen $2^\lambda < \kappa$ die Eigenschaft $|P| < \kappa$ hat. Die Anwendung des besagten Lemmas liefert ein elementares Submodell $\mathfrak{B} = (B, \in)$ von $\mathfrak{A}$, so dass $|\,B\,| = \kappa$, $|\,P \cap B\,| \leq \lambda$, $\lambda \cup \{U, X, \alpha\} \subseteq B$ und $B \cap \kappa \in U$. Sei $\gamma \in \text{Ord}$ und $\pi : \mathfrak{B} \to (L_\gamma[\,\pi[U \cap B]\,], \in)$ der Mostowski-Kollaps. Es ist $\pi(U) = \pi[U \cap B]$.

Zeige nun $\pi(U) = U \cap L_\gamma[\,\pi(U)\,]$. Offenbar ist $\pi[\kappa \cap B] = \kappa$, da $|\,\kappa \cap B\,| = \kappa$. Es existiert ein $Z \in D$ mit $\pi(\xi) = \xi$ für alle $\xi \in Z$. Wäre dem nicht so, erhielten wir einen Widerspruch, da $H := \{\,\xi \in \kappa \cap B \mid \pi(\xi) < \xi\,\} \in U$ folgte und weil $\pi \restriction H$ regressiv ist, könnte π aufgrund der Normalität von U nicht injektiv sein.
Ist $Y \in U \cap B$, so $\pi(Y) \supseteq \pi[Y \cap Z] = Y \cap Z \in U$, also $\pi(Y) \in U$.
Sei andererseits $\tilde{Y} \in U \cap L_\gamma[\,\pi(U)\,]$, so existiert ein $Y \in B$ mit $\pi(Y) = \tilde{Y}$. Dann ist wegen $Y \supseteq \pi^{-1}[\tilde{Y}] \supseteq \pi^{-1}[\tilde{Y} \cap Z] = \tilde{Y} \cap Z \in U$ auch $Y \in U$.

Daraus folgt nun $L_\gamma[\,\pi[U \cap B]] = L_\gamma[\,\pi(U)\,] = L_\gamma[\,U \cap L_\gamma[\pi(U)]] = L_\gamma[U]$. Wegen $\lambda \subseteq B$ ist π auf Teilmengen von λ die Identität und somit $\mathcal{P}(\lambda) \cap L_\gamma[\,U\,] = \mathcal{P}(\lambda) \cap B$. Insbesondere ist $X = \pi(X) \in L_\gamma[U]$.
Nach Wahl von α ergeben sich die Abschätzungen

$$\begin{aligned} |\,\mathcal{P}(\lambda) \cap L_\gamma[\,U\,]\,| \;&\geq\; |\,\mathcal{P}(\lambda) \cap L_\alpha[\,U\,]\,| \;\geq\; \lambda^+ \qquad \text{und} \\ |\,\mathcal{P}(\lambda) \cap L_\gamma[\,U\,]\,| \;&=\; |\,\mathcal{P}(\lambda) \cap B\,| \;=\; |\,P \cap B\,| \;\leq\; \lambda. \end{aligned}$$

Ein Widerspruch. □

Lemma 21. Seien κ eine messbare Kardinalzahl und U ein κ-vollständiger Ultrafilter, der kein Hauptultrafilter ist. Seien weiter $M = \text{Ult}_U(V)$ und $j = j_U$ die kanonische elementare Einbettung von V in M. Dann gilt:

(i) Ist λ eine Limesordinalzahl und $\mathrm{cf}(\lambda) \neq \kappa$, so

$$j(\lambda) = \bigcup_{\alpha<\lambda} j(\alpha).$$

(ii) Ist $\lambda > \kappa$ eine Kardinalzahl mit $2^\nu < \lambda$ für alle $\nu < \lambda$, sowie $\mathrm{cf}(\lambda) \neq \kappa$, so $j(\lambda) = \lambda$.

Beweis. zu (i). Jedes Element von $j(\lambda)$ wird repräsentiert durch ein $f : \kappa \to \lambda$.
Ist $\mathrm{cf}(\lambda) > \kappa$, so existiert für jedes $f : \kappa \to \lambda$ ein $\alpha < \lambda$ mit $[f] < j(\alpha)$.
Sei nun $\gamma := \mathrm{cf}(\lambda) < \kappa$ und $\lambda = \bigcup_{\nu<\gamma} \lambda_\nu$ mit $\lambda_\nu < \lambda$ für alle $\nu < \gamma$. Dann existiert für jedes $f : \kappa \to \lambda$ ein $\nu < \gamma$, so dass $[f] < j(\lambda_\nu)$. Wäre dies nicht der Fall, würde sich folgender Widerspruch ergeben: $\varnothing = \bigcap_{\nu<\gamma}\{\, \xi < \kappa \mid f(\xi) \geq \lambda_\nu \,\} \in U$.

zu (ii). Die Behauptung gilt, wenn für alle $\alpha < \lambda$ gezeigt wird $j(\alpha) < \lambda$, denn nach (i) wäre damit $j(\lambda) = \bigcup_{\alpha<\lambda} j(\alpha) \leq \lambda$.
Sei $\alpha < \lambda$. Jedes Element von $j(\alpha)$ wird durch eine Funktion f: $\kappa \to \alpha$ repräsentiert, also ist $|\, j(\alpha)\,| \leq |\,{}^\kappa\alpha\,| = |\,\alpha\,|^\kappa \leq 2^{\max(\kappa,|\alpha|)} < \lambda$. □

Satz 22. Ist $V = L[U]$ für ein normales Maß U auf einer messbaren Kardinalzahl κ, so ist κ die einzige messbare Kardinalzahl.

Beweis. Angenommen $\lambda \neq \kappa$ ist messbar. Sei $j_D : V \to M$ die kanonische nicht-triviale elementare Einbettung mit kritischem Punkt λ, wobei D ein normales Maß auf λ und $M = \mathrm{Ult}_D(V)$ sind.

Zeige $M = L[U] = V$. Aus der Elementarität von j_D folgt unmittelbar $M = L[\, j_D(U)\,]$.
Ist $\lambda > \kappa$, so gilt $j_D(U) = U$ wegen $\mathrm{rg}_V(U) < \lambda$, also $M = L[U]$.
Sei also $\lambda < \kappa$. Setze

$$Z := \{\, \alpha < \kappa \mid \alpha \text{ unerreichbar und } \alpha > \lambda \,\}$$

so ist $Z \in U$ nach Satz 6. Weiter ist $j_D(\alpha) = \alpha$ für alle $\alpha \in Z$ und $j_D(\kappa) = \kappa$, wie in Lemma 21 (ii) gezeigt wurde.
Zeige $j_D(U) = U \cap M$. Da $j_D(U)$ in M ein Ultrafilter auf κ ist, reicht es $j_D(U) \subseteq U \cap M$ zu zeigen. Sei $X \in j_D(U)$ repräsentiert durch ein $f : \lambda \to U$. Setze $Y := \bigcap_{\xi<\lambda} f(\xi)$, so $Y \in U$. Weil für jedes $y = [g]_{=_D} \in j_D(Y)$ mit $g : \lambda \to Y$ gilt $\{\, \xi < \lambda \mid g(\xi) \in f(\xi) \,\} = \lambda \in D$, erhalten wir $y = [g]_{=_D} \in [f]_{=_D} = X$ und damit $j_D(Y) \subseteq X$. Insgesamt liefert dies

$$X \supseteq j_D(Y) \supseteq j_D[\, Y \cap Z\,] = Y \cap Z \in U.$$

Damit ist $j_D(U) = U \cap M$ gezeigt und es folgt $M = L[\, U \cap M\,] = L[U]$.

In jedem Falle erhalten wir $M = V$, was Theorem 10 widerspricht. □