Seminar zur Mengenlehre SS 2007

Prof. Dr. P. Koepke

Hand-Out zum Vortrag:

Produkt-Forcing

Karen Räsch

16.04.2007

Literatur. Jech, Thomas: Set Theory (Third Millenium Edition, revised and expanded). Springer, Berlin, 2002; S. 115 ff., 229 ff., 272 ff.

In diesem Vortrag wird ausgehend vom Produkt zweier Forcing-Halbordnungen für beliebig große Indexmengen I und zugehörige Familien von Forcing-Halbordnungen $\{ P_i | i \in I \}$ das κ-Produkt dieser Forcing-Halbordnungen definiert, wobei κ eine reguläre Kardinalzahl ist.
Es wird untersucht, inwiefern sich bestimmte Eigenschaften der zugrunde liegenden Forcing-Halbordnungen auf das Produkt übertragen. Dass aus der λ-Abgeschlossenheit aller P_i für $\lambda < \kappa$ auch die des κ-Produktes folgt, ist das erste Resultat in diesem Zusammenhang. Nachdem festzustellen ist, dass die Übertragung von Antiketten-Eigenschaften unabhängig von ZFC ist, wird eine neue Eigenschaft (K) betrachtet. Da sich diese auf Produkte überträgt, gelingt es eine hinreichende Bedingung für c.c.c. Produkte zu finden. Abschließend gilt es ein Theorem zu beweisen, welches sehr genaue Anforderungen an die P_i und $\lambda \in$ Card stellt, damit das κ-Produkt der P_i die λ- bzw. λ^+-Antiketteneigenschaft hat.

Definition 1. Seien P_1 und P_2 Forcing-Halbordnungen. Das Produkt $P_1 \times P_2$ wird geordnet durch

$$(p_1, p_2) \leq (q_1, q_2) \qquad \text{gdw.} \qquad p_1 \leq_{P_1} q_1 \text{ und } p_2 \leq_{P_2} q_2.$$

Sei G ein $(P_1 \times P_2)$-generischer Filter über M, so setze

$$G_1 := \{ p_1 \in P_1 \mid \exists p_2 \ (p_1, p_2) \in G \},$$

$$G_2 := \{ p_2 \in P_2 \mid \exists p_1 \ (p_1, p_2) \in G \}.$$

Bemerkung 2. (1) G_1 und G_2 sind P_1- bzw. P_2-generische Fiter über M.

(2) Es gilt $G_1 \times G_2 = G$.

Lemma 3 (Das Produkt-Lemma). Seien P_1, P_2 Forcing-Halbordnungen über M.
Dann ist

$$G \subseteq P_1 \times P_2 \text{ generisch über } M \qquad \text{gdw.} \qquad \begin{array}{l} G = G_1 \times G_2 \text{ für } G_1 \subseteq P_1 \text{ generisch über } M \\ \text{und } G_2 \subseteq P_2 \text{ generisch über } M[G_1]. \end{array}$$

Weiterhin gilt

$$M[G] = M[G_1][G_2].$$

Korollar 4. Seien P_1, P_2 Forcing-Halbordnungen über M und $G_1 \subseteq P_1$ generischer Filter über M und $G_2 \subseteq P_2$ über $M[G_1]$. Dann ist G_1 generisch über $M[G_2]$ und es gilt

$$M[G_1][G_2] \;=\; M[G_2][G_1].$$

Nun werden unendliche Produkte von Forcing-Halbordnungen eingeführt.

Definition 5. Sei $\{ P_i \mid i \in I \}$ eine Familie von Forcing-Halbordnungen. Dann besteht das *Produkt* $P = \prod_{i \in I} P_i$ aus allen Funktionen $p : I \to M$ mit $p(i) \in P_i$ für alle $i \in I$ und $p(i) \neq 1_{P_i}$ für nur endlich viele $i \in I$. P wird durch

$$p \leq q \qquad \text{gdw.} \qquad \forall\, i \in I \;\; p(i) \leq q(i)$$

zu einer Forcing-Halbordnung.

Für $p \in P$ heißt

$$s(p) := \{ i \in I \mid p(i) \neq 1_{P_i} \} \qquad \text{Support von } p.$$

Bemerkung 6. Ist G ein P-generischer Filter über M, so ist für jedes $i \in I$ die Menge $G_i = \{ p(i) \mid p \in G \}$, die Projektion von G auf P_i, ein P_i-generischer Filter.

Eine natürliche Verallgemeinerung von Definition 5 ist

Definition 7. Sei κ eine reguläre Kardinalzahl. Das *κ-Produkt* der Familie $\{ P_i \mid i \in I \}$ von Forcing-Halbordnungen ist die Menge aller Funktionen p auf I mit $< \kappa$-Support, d.h. $|\, s(p)\,| < \kappa$. Die Ordnung ist auch hier komponentenweise definiert.

Es ist üblich für $< \lambda^+$-Support auch λ-Support zu sagen und abzählbarer Support bedeutet $< \aleph_1$-Support.

Lemma 8. Sei $\lambda \in$ Card.

Für λ-abgeschlossene Forcing-Halbordnungen P_1 und P_2 ist auch das Produkt $P_1 \times P_2$ λ-abgeschlossen.

Ist $\kappa \in$ Card regulär, so hat für $\lambda < \kappa$ und eine Familie von λ-abgeschlossenen Forcing-Halbordnungen $\{ P_i \mid i \in I \}$ das κ-Produkt P auch diese Eigenschaft.

Nun soll es darum gehen, zu untersuchen, wie sich Antiketteneigenschaften auf Produkte übertragen. Um die Problematik genauer zu beleuchten, sei auf den Anhang des vollständig ausformulierten Vortrages verwiesen. Dort wird beschrieben, wie man zeigen kann, dass die Übertragung von c.c.c. auf Produkte von ZFC unabhängig ist.

Die folgende Eigenschaft ist stärker als c.c.c.:

Definition 9. Eine Forcing-Halbordnung hat die Eigenschaft (K), wenn jede überabzählbare Menge von Bedingungen eine überabzählbare Teilmenge aus paarweise in P kompatiblen Elementen enthält.

Lemma 10. Sind P_1, P_2 Forcing-Halbordnungen mit der Eigenschaft (K), so auch $P_1 \times P_2$.

Theorem 11. Hat für eine Familie $\{ P_i \mid i \in I \}$ von Forcing-Halbordnungen jedes zugehörige P_i die Eigenschaft (K), so auch $P = \prod_{i \in I} P_i$.

Korollar 12. Das Produkt abzählbarer Forcing-Halbordnungen hat die Eigenschaft (K), also insbesondere c.c.c.

Theorem 13. Sei $\lambda \in \mathrm{Card}$.

(i) Ist $|P_i| \leq \lambda$ für alle $i \in I$, so hat $\prod_{i \in I} P_i$ die λ^+-Antiketten Eigenschaft.
(ii) Sei κ regulär, $\kappa \leq \lambda$, $\lambda^{<\kappa} = \lambda$ und $|P_i| \leq \lambda$ für alle $i \in I$. Dann hat das κ-Produkt der P_i die λ^+-Antiketten Eigenschaft.
(iii) Ist λ unerreichbar, $\kappa < \lambda$ regulär und $|P_i| < \lambda$ für alle $i \in I$, so hat das κ-Produkt der P_i die λ-Antiketten Eigenschaft.

Δ-Systeme

Definition 14. Ein System $\mathcal{Z}$ aus endlichen Mengen heißt Δ-*System*, wenn es eine endliche Menge S gibt, so dass für alle $X_1, X_2 \in \mathcal{Z}$ gilt $X_1 \cap X_2 = S$.

Satz 15 (Δ-Lemma). Sei $\mathcal{W}$ ein System von überabzählbar vielen endlichen Mengen. Dann gibt es ein überabzählbares Δ-System $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{W}$.