Seminar zur Mengenlehre: Forcing — SS 2007
Prof. Dr. P. Koepke — 11. und 18. Juni 2007
Dr. B. Irrgang

Vortrag 8: Einbettungssatz von Jech und Sochor und Konsistenz der Negation von AC

Friedemann Diener

1 Der Einbettungssatz von Jech und Sochor

Der hier vorgestellte Satz von Jech und Sochor stellt die Verbindung zwischen Permutationsmodellen und symmetrischen Modellen her. Er zeigt, dass sich jedes Permutationsmodell zu einem beliebigen Grad an Genauigkeit in ein symmetrisches Modell von ZF einbetten lässt. Man kann den Einbettungssatz also als eine Art Approximation des Permutationsmodells durch ein symmetrisches Modell betrachten. Um die Konsistenz von $ZF + \neg AC$ zu zeigen, reicht es dann ein Permutationsmodell von ZFA zu konstruieren, in dem AC nicht gilt.

Satz 1.1 (Jech-Sochor) *Sei U ein abzählbares Permutationsmodell, A die Menge der Atome von U und $(\alpha \in Ord)^U$. Dann existiert ein symmetrisches Modell N von ZF und eine Einbettung $\sim: U \to N$, $x \mapsto \tilde{x}$, so dass gilt:*

$$(P^\alpha(A))^U \text{ ist } \in\text{-isomorph zu } (P^\alpha(\tilde{A}))^N$$

Beweis: Wir arbeiten in $ZFA + AC$. Die Ausgangssituation ist folgende:

- Sei A die Menge der Atome.
- Sei $V = P^\infty(A)$,
- und $M = P^\infty(\emptyset)$ der Kern von V.
- Wir betrachten eine Gruppe $\mathcal{G}$ von Permutationen von A,
- und einen Filter $\mathcal{F}$ auf $\mathcal{G}$.
- Sei U das durch $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ gegebene Permutationsmodell
- und $\alpha \in Ord$.

Konstruktion bzw. Idee:

- Der Kern $M = P^\infty(\emptyset)$ ist ein Modell von ZFC.
- Wir werden zunächst eine generische Erweiterung $M[G]$ des Kerns M konstruieren, indem wir die Atome $a \in A$ auf geeignete Mengen $\tilde{a}$ von Teilmengen einer regulären Kardinalzahl κ abbilden.(D.h. wir adjungieren für jedes $a \in A$ eine generische Menge $\tilde{a}$ von κ-vielen generischen Teilmengen von κ).
- Dann erhalten wir das Modell N als symmetrisches Submodell von $M[G]$.

Sei $\kappa \in Card$ eine reguläre Kardinalzahl, mit $\kappa > |P^\alpha(A)|$. Definiere die Forcing-Halbordnung $\mathbb{P} = (\mathbb{P}, \leq_\mathbb{P}, 1_\mathbb{P})$ durch:

$$\mathbb{P} := \{p \in M | p : dom(p) \to \{0,1\} \wedge |dom(p)| < \kappa \wedge dom(p) \subset (A \times \kappa) \times \kappa\}, \quad (1.1)$$

$\leq_\mathbb{P} := \supseteq$ und $1_\mathbb{P} := \emptyset$. [Hierbei muss A durch ein $A' \in M$ gleicher Kardinalität ersetzt werden, um $\mathbb{P} \in M$ zu erreichen. Identifiziere A mit A'].
Sei G ein M-generischer Filter über $\mathbb{P}$. Für jedes $a \in A$ und $\xi < \kappa$, definiere:

$$x_{a,\xi} := \{\eta \in \kappa | (\exists p \in G) p(a, \xi, \eta) = 1\} \in M[G] \quad (1.2)$$

Jedes $x_{a,\xi}$ besitzt einen kanonischen Namen:

$$\dot{x}_{a,\xi} := \{(\check{\eta}, p) | p(a, \xi, \eta) = 1\} \in M \quad (1.3)$$

Die Definition von $\dot{x}_{a,\xi}$ ist gerechtfertigt, denn es gilt:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{a,\xi}^G &= \{\check{\eta}^G | \exists p \in G (\check{\eta}, p) \in \dot{x}_{a,\xi}\} \\ &= \{\eta \in \kappa | \exists p \in G p(a, \xi, \eta) = 1\} \\ &= x_{a,\xi}. \end{aligned}$$

Definiere für jedes $a \in A$:

$$\begin{aligned} \tilde{a} &:= \{x_{a,\xi} | \xi < \kappa\} \in M[G] \quad (1.4) \\ \dot{\tilde{a}} &:= \{(\dot{x}_{a,\xi}, 1_\mathbb{P}) | \xi < \kappa\} \in M, \end{aligned}$$

und für A:

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \{\tilde{a} | a \in A\} \in M[G] \quad (1.5) \\ \dot{\tilde{A}} &= \{(\dot{\tilde{a}}, 1_\mathbb{P}) | a \in A\} \in M. \end{aligned}$$

Nun erweitern wir durch $\in$-Rekursion die Definition der Einbettung $\sim$ auf ganz V. Für alle $x \in V$ sei:

$$\tilde{x} := \{\tilde{y} | y \in x\} \in M[G] \quad (1.6)$$

und entsprechend

$$\dot{\tilde{x}} := \{(\dot{\tilde{y}}, 1_\mathbb{P}) | y \in x\} \in M \quad (1.7)$$

Jetzt ist zu zeigen, dass diese Einbettung $x \mapsto \tilde{x}$ tatsächlich ein $\in$-Isomorphismus ist. Dazu folgendes Lemma:

Lemma 1.2 *Für alle $x, y \in V$ gilt:*

$$\begin{aligned} x \in y \quad &gdw. \quad \tilde{x} \in \tilde{y} \quad und \\ x = y \quad &gdw. \quad \tilde{x} = \tilde{y}. \end{aligned}$$

Beweis: Wenn $x \in y$ dann folgt aus der Definition (1.6) von $\tilde{x}$ und $\tilde{y}$, dass $\tilde{x} \in \tilde{y}$. Genauso für $x = y$. Die Hinrichtung ist also klar.
Um Rückrichtung, also $\tilde{x} \in \tilde{x} \to x \in y$ und $\tilde{x} = \tilde{x} \to x = y$ zu zeigen benutzen wir Induktion über den Rang, simultan für $\in$ und $=$.

Zur Vorbereitung zeigen wir zunächst:

(1) $$(a,\xi) \neq (a',\xi') \to x_{a,\xi} \neq x_{a',\xi'}$$

Beweis: Betrachte die Menge

$$D := \{p \in \mathbb{P} | \exists \eta < \kappa \; p(a,\xi,\eta) \neq p(a',\xi',\eta)\}$$

D ist dicht in $\mathbb{P}$: Sei $p \in \mathbb{P}$. Betrachte $\eta_0 > sup\{\eta < \kappa | (a,\xi,\eta) \in dom(p) \vee (a',\xi',\eta) \in dom(p)\}$. Setze $d = p \cup \{((a,\xi,\eta_0),1),((a',\xi',\eta_0),0)\}$. Dann ist $d \in D$ und $d \supseteq p$. also ist D dicht in $\mathbb{P}$.
Damit ist $D \cap G \neq \emptyset$. Sei $(a,\xi) \neq (a',\xi')$. Es ex. $p \in D \cap G$ mit $p(a,\xi,\eta) \neq p(a',\xi',\eta)$ also ist $x_{a,\xi} = \{\eta < \kappa | (\exists p \in G) p(a,\xi,\eta) = 1\} \neq \{\eta < \kappa | (\exists p \in G) p(a',\xi',\eta) = 1\} = x_{a',\xi'}$.

qed(1)

Es folgt für Atome $a, b \in A$: wenn $a \neq b$ dann $\tilde{a} \neq \tilde{b}$.

Zeige jetzt:

(2) $$\forall z \in M, a \in A, \xi < \kappa : x_{a,\xi} \neq z.$$

Sei $z \in M$ beliebig. Es gilt $M[G] \models x_{a,\xi} \subseteq \kappa$ aufgrund der Definition von $x_{a,\xi}$. Für $z \nsubseteq \kappa$ ist die Sache klar, weil $x_{a,\xi} \subseteq \kappa$. Sei also $z \subseteq \kappa$. Definiere für $z \in M$:

$$\chi_z(\eta) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \eta \in z, \eta < \kappa \\ 0 & \text{falls } \eta \notin z, \eta < \kappa \end{cases}$$

Definiere weiter:

$$D_z := \{p \in \mathbb{P} | (\exists \eta < \kappa) p(a,\xi,\eta) \neq \chi_z\}$$

D_z ist dicht in $\mathbb{P}$. Sei $p \in D_z \cap G \neq \emptyset$. Dann ex. $\eta_0 < \kappa$ mit $p(a,\xi,\eta_0) \neq \chi_z(\eta_0)$, außerdem ist $x_{a,\xi} = \{\eta \in \kappa | \exists p \in G \; p(a,\xi,\eta) = 1\}$. Für o.E. $\chi_z(\eta_0) = 0 \neq 1 = p(a,\xi,\eta_0)$, ist also $\eta_0 \in x_{a,\xi}$ aber $\eta_0 \notin z$.

qed(2)

Weiter gilt:

(3) $$\forall x \in V, a \in A, \xi < \kappa : \tilde{x} \neq x_{a,\xi}.$$

Wenn $x \in M$, folgt $x = \tilde{x}$ und nach (2) folgt $\forall x \in M : x \neq x_{a,\xi}$. Sei also $x \in V \backslash M$. Dann ex. $\tilde{a} \in TC(\tilde{x})$. Also $\forall \xi < \kappa : \; x_{a,\xi} \in \tilde{a} \in \cdots \in \tilde{x}$. Aber $\forall \xi < \kappa$ ist $x_{a,\xi} \subseteq \kappa$ und $\bigcup x_{a,\xi} = \kappa$. Wir haben $rk(x_{a,\xi}) = \kappa + 1$, $rk(\tilde{x}) > \kappa + 1$. $[rk(x) = sup\{rk(y) | y \in TC(x)\} + 1]$. Also $\tilde{x} \neq x_{a,\xi}$.

qed(3)

Das Lemma können wir nun durch Induktion über den Rang für $\in$ und $=$ beweisen:
Sei $u \in v \leftrightarrow \tilde{u} \in \tilde{v}$ und $u = v \leftrightarrow \tilde{u} = \tilde{v}$ für $rk(u), rk(v) < rk(y)$:

1. Sei $\tilde{x} \in \tilde{y}$, dann ist y kein Atom, da sonst $\tilde{x} = x_{a,\xi}$ für geeignetes (a,ξ) gilt, was nach (3) nicht sein kann. Sei also $\tilde{x} = \tilde{z}$ für ein $z \in y$, ein solches gibt nach der Definition von $\tilde{y}$, dann folgt nach Induktionsvoraussetzung, dass $x = z$ und somit $x \in y$.

2. Sei $x \neq y$. Angenommen $x, y \in A$, dann folgt $\tilde{x} \neq \tilde{y}$. Sonst, o.E. existiere $z \in x$ mit $z \notin y$, dann gilt nach Induktionsvoraussetzung $\tilde{z} \in \tilde{x}$ und $\tilde{z} \notin \tilde{y}$,und somit $\tilde{x} \neq \tilde{y}$

qed(Lemma 1.2)

Nun konstruieren wir ein symmetrisches Submodell $N \subseteq M[G]$. Wir konstruieren N so, dass für alle x gilt: $x \in U$ gdw. $\tilde{x} \in N$, und $(P^\alpha(A))^U$ $\in$-isomorph zu $(P^\alpha(\tilde{A})^N)$ ist. Dazu definieren wir zunächst eine Gruppe $\overline{\mathcal{G}}$ von Automorphismen auf $\mathbb{P}$ und einen Filter $\overline{\mathcal{F}}$ auf $\overline{\mathcal{G}}$.
Wir bezeichnen mit $S(A) = \{\sigma | \sigma : A \leftrightarrow A\}$ die Symmetrische Gruppe über A. Für jedes $\sigma \in S(A)$ definiere:

$$\overline{\sigma} := \{\pi \in S(A \times \kappa) | \forall a \in A \ \ \forall \xi < \kappa \ \ \exists \xi' < \kappa : \ \ \pi(a, \xi) = (\sigma(a), \xi')\}.$$

Weiter definiere:

$$\overline{\mathcal{G}} := \bigcup \{\bar{\sigma} | \sigma \in \mathcal{G}\}. \tag{1.1}$$

Genauso für jede Untergruppe $H \subseteq \mathcal{G}$ definiere: $\overline{H} := \bigcup \{\overline{\sigma} | \sigma \in H\}$.
Weil jede Permutation $\pi \in S(A \times \kappa)$ einen Automorphismus auf $\mathbb{P}$ induziert, via:

$$(\pi p)(\pi(a, \xi), \eta) = p(a, \xi, \eta) \qquad \text{(für alle } a \in A, \xi, \eta < \kappa), \tag{1.2}$$

kann $\overline{\mathcal{G}}$ als Gruppe von Automorphismen auf $\mathbb{P}$ interpretiert werden.
Für jedes endliche $E \subset A \times \kappa$ definiere:

$$\text{fix}(E) := \{\pi \in \overline{\mathcal{G}} | \forall (a, \xi) \in E \ \ \pi(a, \xi) = (a, \xi)\}. \tag{1.3}$$

Sei dann $\overline{\mathcal{F}}$ der von der Menge

$$\{\overline{H} | H \in \mathcal{F}\} \cup \{\text{fix}(E) | E \subset A \times \kappa \text{ endlich}\} \tag{1.4}$$

erzeugte Filter auf $\overline{\mathcal{G}}$.
Sei HS die Klasse aller erblich symmetrischen Namen bezüglich $\overline{\mathcal{F}}$ und sei N das entsprechende symmetrische Submodell von $M[G]$.

$$N := \{\dot{x}^G | \dot{x} \in HS\} \tag{1.5}$$

Es folgt:

1. Für alle $a \in A$ und $\xi < \kappa$ gilt: $\dot{x}_{a,\xi}$ ist symmetrisch.
   Beweis: Es ist zu zeigen, dass $\text{sym}_{\overline{\mathcal{G}}}(\dot{x}_{a,\xi}) \in \overline{\mathcal{F}}$.
   Für $\pi \in S(A \times \kappa)$ gilt: $\pi \dot{x}_{a,\xi} = \dot{x}_{\pi(a,\xi)}$. Denn $\pi \dot{x}_{a,\xi} = \pi\{(\check{\eta}, p) | p(a, \xi, \eta) = 1\} = \{(\check{\eta}, \pi p) | (\pi p)(\pi(a, \xi), \eta) = 1\} = \{(\check{\eta}, p) | p(\pi(a, \xi), \eta) = 1\} = \dot{x}_{\pi(a,\xi)}$.
   Damit gilt weiter:
   $\text{sym}_{\overline{\mathcal{G}}}(\dot{x}_{a,\xi}) = \{\pi \in \overline{\mathcal{G}} | \pi(\dot{x}_{a,\xi}) = \dot{x}_{a,\xi}\} = \{\pi \in \overline{\mathcal{G}} | \forall (a, \xi) \in \{(a, \xi)\} \ \pi(a, \xi) = (a, \xi)\} = \text{fix}(\{(a, \xi)\}) \in \overline{\mathcal{F}}$

2. Für alle $a \in A$ gilt: $\dot{\tilde{a}}$ ist symmetrisch.
   Beweis: Für $H = \text{fix}(\{a\})$, ist $\overline{H} = \overline{\{\sigma \in \mathcal{G} | \sigma(a)\}} = \{\pi \in \overline{\mathcal{G}} | \pi(\dot{\tilde{a}}) = \dot{\tilde{a}}\} = \text{sym}_{\overline{\mathcal{G}}}(\dot{\tilde{a}})$, und $\overline{H} \in \overline{\mathcal{F}}$.

3. Es gilt $\dot{\tilde{A}}$ ist symmetrisch.
   Beweis: Für $H = \{id\}$, ist $\overline{\mathcal{F}} \ni \overline{H} = \overline{\{\pi \in \mathcal{G} | \pi(A) = A\}} = \{\pi \in \overline{\mathcal{G}} | \pi(\dot{\tilde{A}}) = \dot{\tilde{A}}\} = \text{sym}_{\bar{\mathcal{G}}}(\dot{\tilde{A}})$.

Damit haben wir insgesamt, dass $\forall a \in A, \xi < \kappa$: $x_{a,\xi} \in N$, $\forall a \in A$: $\tilde{a} \in N$ und $\tilde{A} \in N$.

Lemma 1.3 *Für alle $x \in V$ gilt:*

$$x \in U \leftrightarrow \dot{\tilde{x}} \in \mathrm{HS}$$

Beweis: Es genügt zu zeigen, dass:

$$\mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(x) \in \mathcal{F} \leftrightarrow \mathrm{sym}_{\overline{\mathcal{G}}}(\dot{\tilde{x}}) \in \overline{\mathcal{F}}$$

Es gilt:

(1) $\pi(\dot{x}_{a,\xi}) = \dot{x}_{\pi(a,\xi)}$

Beweis: siehe oben.
Weiter gilt:

(2) Sei $\sigma \in \mathcal{G}$ und $\pi \in \overline{\sigma}$, dann ist $\pi\dot{\tilde{x}}$ der kanonische Name für $\tilde{\sigma x}$. D.h $(\pi\dot{\tilde{x}})^G = \tilde{\sigma x}$

Beweis: Es gilt:

$$\begin{aligned}(\pi\dot{\tilde{x}})^G &= \{(\pi\dot{\tilde{y}}, 1_{\mathbb{P}}) | \tilde{y} \in \tilde{x}\}^G \\ &= \{(\pi\dot{\tilde{y}}, 1_{\mathbb{P}}) | y \in x\}^G \qquad \textit{(wegen Lemma}(1.2)) \\ &= \{(\pi\dot{\tilde{y}})^G | y \in x\},\end{aligned}$$

außerdem gilt:

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma x} &= (\{\sigma y | y \in x\})^\sim \\ &= \{\tilde{\sigma y} | y \in x\}.\end{aligned}$$

Wegen des induktiven Aufbaus von $\tilde{x}$ genügt es also zu zeigen, dass $(\pi\dot{\tilde{a}})^G = \tilde{\sigma a}$:

$$\begin{aligned}(\pi\dot{\tilde{a}})^G &= \{(\pi\dot{x}_{a,\xi}, 1_{\mathbb{P}}) | x_{a,\xi} \in \tilde{a}\}^G \\ &= \{(\dot{x}_{\pi(a,\xi)}, 1_{\mathbb{P}}) | \xi < \kappa\}^G \qquad \textit{(wegen (1) und Def. von } x_{a,\xi}) \\ &= \{x_{\pi(a,\xi)} | \xi < \kappa\} \\ &= \{x_{\sigma a,\xi'} | \xi' < \kappa\} \qquad \textit{(wegen Def. von } \pi) \\ &= \tilde{\sigma a}.\end{aligned}$$

qed(2)

Damit gilt:

(3) $\mathrm{sym}_{\overline{\mathcal{G}}}(\dot{\tilde{x}}) \supseteq \overline{\mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(x)}$.

Beweis: Zu zeigen: $\pi \in \overline{\mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(x)} \to \pi \in \mathrm{sym}_{\overline{\mathcal{G}}}(\dot{\tilde{x}})$.
Sei $\pi \in \overline{\mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(x)} = \bigcup\{\overline{\sigma} | \sigma \in \mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(x)\}$. Dann ist aber $\pi \in \overline{\sigma}$ und $\sigma \in \mathcal{G}$, wie in der Voraussetzung von (2). Es ist zu zeigen, dass $\pi \in \mathrm{sym}_{\overline{\mathcal{G}}}(\dot{\tilde{x}}) = \{\pi \in \overline{\mathcal{G}} | \pi(\dot{\tilde{x}}) = \dot{\tilde{x}}\}$, d.h. zu zeigen $\pi(\dot{\tilde{x}}) = \dot{\tilde{x}}$. Nach (2) gilt aber: $(\pi(\dot{\tilde{x}}))^G = \tilde{\sigma x} = \tilde{x}$.

qed(3)

Aufgrund der Definition von quer, (d.h. π vertauscht erste Komponente gemäß σ), gilt die andere Inklusion: $\mathrm{sym}_{\overline{\mathcal{G}}}(\dot{\tilde{x}}) \subseteq \overline{\mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(x)}$.
Wir haben also insgesamt: $\mathrm{sym}_{\overline{\mathcal{G}}}(\dot{\tilde{x}}) = \overline{\mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(x)}$, und aufgrund der Definition von $\overline{\mathcal{F}}$ erhalten wir: $\mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(x) \in \mathcal{F} \to \mathrm{sym}_{\overline{\mathcal{G}}}(\dot{\tilde{x}}) \in \overline{\mathcal{F}}$.
Für die andere Richtung sei $\mathrm{sym}_{\overline{\mathcal{G}}}(\dot{\tilde{x}}) \in \overline{F}$, dann ist $\overline{\mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(x)} \supset \overline{H} \cap \mathrm{fix}(E)$ für ein $H \in \mathcal{F}$ und ein endliches $E \subset A \times \kappa$. Sei $e := \{a \in A | \exists \xi < \kappa \ (a, \xi) \in E\}$, dann ist $\mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(x) \supset H \cap \mathrm{fix}(e)$ und es gilt $\mathrm{fix}(e) \in \mathcal{F}$, da für alle $a \in A$ gilt $\mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(a) \in \mathcal{F}$. Damit erhalten wir $\mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(x) \in \mathcal{F}$.

qed(Lemma (1.3))

Lemma 1.4 *Für alle x gilt:*

$$x \in U \leftrightarrow \tilde{x} \in N$$

Beweis: Nach Lemma (1.3) gilt: $x \in U \to \dot{\tilde{x}} \in HS$, und aus $\dot{\tilde{x}} \in HS$ folgt $\tilde{x} \in N$. Es ist also nur noch die Rückrichtung zu zeigen:

$$\tilde{x} \in N \to x \in U$$

Angenommen, dies gilt nicht. Dann wähle ein x minimalen Rangs mit $\tilde{x} \in N$ aber $x \notin U$. Da $\tilde{x} \in N$, existiert ein $\dot{z} \in$ HS und ein $p \in G$, so dass $p \Vdash \dot{z} = \dot{\tilde{x}}$. Da $\mathrm{sym}_{\overline{\mathcal{G}}}(\dot{z}) \in \overline{\mathcal{F}}$, gilt aufgrund der Def. von $\overline{\mathcal{F}}$, dass $\mathrm{sym}_{\overline{\mathcal{G}}}(\dot{z}) \supseteq \overline{H} \cap \mathrm{fix}(E)$ für ein geeignetes $H \in \mathcal{F}$ und ein endliches $E \subseteq A \times \kappa$. Wir suchen ein $\sigma \in \mathcal{G}$ und ein $\pi \in \bar{\sigma}$, so dass:

1. πp und p sind kompatibel
2. $\pi \in \overline{H} \cap \mathrm{fix}(E) \subseteq \mathrm{sym}_{\overline{\mathcal{G}}}(\dot{z})$
3. $\sigma x \neq x$

Dann haben wir nach (2): $\pi\dot{z} = \dot{z}$. Es gibt kein $p \in P$ mit $p \Vdash \pi\dot{\tilde{x}} = \dot{\tilde{x}}$, da sonst $\sigma x = x$ gelten würde, was im Widerspruch zu (3) in Verbindung mit Lemma (1.2) stehen würde. Das Symmetrie Lemma (siehe letzter Vortrag) liefert: $\pi p \Vdash \pi\dot{z} = \pi\dot{\tilde{x}}$. Somit erhalten wir:

$$\pi p \cup p \Vdash \dot{z} = \dot{\tilde{x}}$$
$$\pi p \cup p \Vdash \dot{z} = \pi\dot{\tilde{x}}.$$

Das ist ein Widerspruch.
Jetzt müssen wir noch ein solches π finden. Wir hatten $x \notin U$ dann folgt aus Lemma(1.3), dass $\dot{\tilde{x}} \notin HS$ außerdem gilt aufgrund der Wahl von x, dass $x \subseteq U$. Es folgt, dass x nicht symmetrisch ist, denn:

HS ist wie folgt definiert: $dom(\dot{\tilde{x}}) \subseteq HS \wedge \dot{\tilde{x}}$ ist symmetrisch $\leftrightarrow \dot{\tilde{x}} \in HS$.

Das ist äquivalent zu: $\dot{\tilde{x}} \notin HS \to (\neg dom(\dot{\tilde{x}}) \subseteq HS \vee \neg\dot{\tilde{x}}$ ist symmetrisch)

da $x \subseteq U$ folgt wegen Lemma(1.3) $dom(\dot{\tilde{x}}) \subseteq HS$.

Also: $\dot{\tilde{x}} \notin HS \wedge x \subseteq U \to \dot{\tilde{x}}$ ist nicht symmetrisch $\to x$ ist nicht symmetrisch.

Weil x nicht symmetrisch ist existiert ein $\sigma \in \mathcal{G}$, so dass $\sigma(x) \neq x$ und $\sigma \in H \cap \mathrm{fix}(e)$, wobei $e := \{a \in A | \exists \xi < \kappa\ (a, \xi) \in E\}$, ($e$ ist die Projektion von E in A). Da $|p| < \kappa$ existiert ein $\gamma < \kappa$, so dass $(a, \xi) \notin \mathrm{dom}(p)$ für alle $a \in A$ und $\kappa > \xi > \gamma$. Wir definieren nun $\pi \in \overline{\sigma}$ wie folgt:

$\pi(a, \xi) = (a, \xi)$	wenn $a \in e$
$\pi(a, \xi) = (\sigma a, \gamma + \xi)$ und $\pi(a, \gamma + \xi) = (\sigma a, \xi)$	wenn $a \notin e$ und $\xi < \gamma$
$\pi(a, \xi) = (\sigma a, \xi)$	wenn $a \notin e$ und $\xi > \gamma \cdot 2$

Damit ist $\pi \in \bar{H} \cap \mathrm{fix}(E)$, und πp ist mit p kompatibel.
Beweis: zu zeigen: $\pi \in \overline{H} \cap \mathrm{fix}(E) \subseteq \mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(\dot{z})$
Z.B.: Wenn $a \in e$: Dann ist $(a, \xi) \in E$ und aus $\pi(a, \xi) = (a, \xi)$ folgt $\pi \in \{\pi \in \overline{\mathcal{G}} | \forall a, \xi \in E\ \pi(a, \xi) = (a, \xi)\} = \mathrm{fix}(E)$.
In den anderen Fällen ist $\pi \in \overline{H}$, der Beweis ist ähnlich.
Für p und πp kompatibel, ist der erste Fall klar, $p = \pi p$. In den anderen Fällen nutzt man im wesentlichen aus, dass $dom(p) \neq dom(\pi p)$.

qed(Lemma (1.4))

Wir vervollständigen den Beweis des Satzes mit Lemma (1.5):

Lemma 1.5

$$\left((P^\alpha(A))^U\right)^\sim = (P^\alpha(\tilde{A}))^N$$

Beweis: Die Richtung ($\subseteq$) ist klar, denn angenommen $\tilde{x} \in \left((P^\alpha(A))^U\right)^\sim$ und für alle $y \in x$ $\tilde{y} \in (P^\beta(\tilde{A}))^N$, d.h. $\tilde{x} \subseteq (P^\beta(\tilde{A}))^N$, $\beta + 1 = \alpha$. Dann folgt $\tilde{x} \in (\mathfrak{P}(P^\beta(\tilde{A})))^N = (P^\alpha(\tilde{A}))^N$
Die andere Inklusion ($\supseteq$) zeigen wir auch mit Induktion:
Dazu sei $x = (P^\alpha(A))^U$, wobei die Behauptung für x bereits gelten soll, also $\tilde{x} = \left((P^\alpha(A))^U\right)^\sim = (P^\alpha(\tilde{A}))^N$. Weiter sei $y \in N$ und $y \subseteq \tilde{x}$. Zu zeigen: es ex. ein $z \in U$, so dass $y = \tilde{z} \in \left((P^{\alpha+1}(A))^U\right)^\sim$.
Sei $\dot{y}$ Name für y. Für $t \in x$ gilt entweder $M[G] \models \tilde{t} \in y$ oder $M[G] \models \tilde{t} \notin y$. Also gibt es ein p_t mit $p_t \Vdash \dot{\tilde{t}} \in \dot{y}$ oder $p_t \Vdash \dot{\tilde{t}} \notin \dot{y}$. Da $\mathbb{P} < \kappa$-abgeschlossen ist und $(|x| < \kappa)^U$, gibt es ein $p \in G$, dass für alle $t \in x$ entscheidet ob $\dot{\tilde{t}} \in \dot{y}$ oder nicht.
Definiere $z := \{t \in P^\alpha(A) | p \Vdash \dot{\tilde{t}} \in \dot{y}\}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\tilde{z} &= \{\tilde{t} | t \in z\} \\
&= \{\tilde{t} | t \in x \wedge p \Vdash \dot{\tilde{t}} \in \dot{y}\} \\
&= \{\tilde{t} | t \in x \wedge M[G] \models \tilde{t} \in y\} \\
&= \{\tilde{t} | \tilde{t} \in \tilde{x} \wedge M[G] \models \tilde{t} \in y\} && (\textit{wegen Lemma}(1.2)) \\
&= \{\tilde{t} \in \tilde{x} | M[G] \models \tilde{t} \in y\} \\
&= \{\tilde{t} | \tilde{t} \in y\} && (\textit{weil } y \subseteq \tilde{x}) \\
&= y
\end{aligned}$$

Wegen Lemma (3.4) ist mit $\tilde{z} \in N$ auch $z \in U$.

qed(Lemma (1.5))

QED(Satz (1.1): Jech-Sochor)

2 Anwendung: Konsistenz von ¬AC

Als Anwendung des Einbettungssatzes betrachten wir eine Formel von der Form $\exists X\varphi(X,\gamma)$, wobei alle Quantoren, die in φ vorkommen auf $P^\gamma(X)$ beschränkt sind, d.h. alle Quantoren in φ sind von der Form $\exists u \in P^\gamma(X)$ bzw. $\forall u \in P^\gamma(X)$. Sei U ein Permutationsmodell mit:

$$U \models \exists X\ \varphi(X,\gamma)$$

Sei $X \in U$, dann ist $U \models \varphi(X,\gamma)$.
Sei $\alpha \in Ord$ so, dass $P^\gamma(X) \subseteq P^\alpha(A)$.
Mit dem eben bewiesenen Einbettungstheorem kann U in ein ZF-Modell N eingebettet werden, so dass $(P^\alpha(A))^U$ $\in$-isomorph ist zu $(P^\alpha(\tilde{A}))^N$.
Weil die Quantoren von φ auf $P^\gamma(X)$ beschränkt waren folgt $N \models \varphi(\tilde{X},\gamma)$, und damit:

$$N \models \exists X\varphi(X,\gamma).$$

Ein konkretes Beispiel haben wir im Vortrag über Permutationsmodelle gesehen. Das dort konstruierte Fraenkelsche Permutationsmodell $U = FM$ erfüllt die Aussage „X ist eine abzählbare Menge von Paaren ohne Auswahlfunktion“. Das ist eine Formel vom obigen Typ. Wir erhalten:

$$FM \models \exists X \text{ X ist eine abzählbare Menge von Paaren ohne Auswahlfunktion.}$$

Mit dem Einbettungssatz erhalten wir ein symmetrisches ZF-Modell N mit:

$$N \models \exists X \text{ X ist eine abzählbare Menge von Paaren ohne Auswahlfunktion,}$$

und damit schließlich die relative Konsistenz von $\neg AC$:

$$N \models ZF + \neg AC.$$

Bemerkung: Es könnte der Eindruck entstehen, dass sich alle Unabhängigkeitsresultate, die man in ZFA erhält, nach ZF übertragen lassen, das ist aber nicht der Fall. Das zeigt folgendes Beispiel:
Bezeichne MC das „Axiom of Multible Choice“:

Für jede Menge S von nicht-leeren Mengen existiert eine Fkt. f, so dass:
$$(\forall x \in M)(\emptyset \neq f(x) \subseteq x \wedge f(x) \textit{ endlich}).$$

In ZFA gilt $(AC \rightarrow MC)$, während in ZF auch $(MC \rightarrow AC)$ gilt, ist dies in ZFA nicht der Fall, d.h. es gibt ein ZFA-Modell in dem MC gilt und AC nicht gilt. Ein Beispiel für ein solches Modell ist gerade das Fraenkelsche Modell FM, d.h.:

$$FM \models MC + \neg AC.$$

Die Unabhängigkeit von AC von MC in ZFA lässt sich also nicht nach ZF übertragen.