Seminar zur Mengenlehre

Forcing und Symmetrische Modelle

Gregor Weckbecker

4. Juni 2007

1 Symmetrische Modelle

Im folgenden sei M ein Grundmodell und $(P, <_P, 1_P)$ ein p.o.set.

Lemma 1.1 (Symmetrie Lemma)**.** *Sei π ein Automorphismus auf P. Dann gibt es ein $\tilde{\pi} : M^P \to M^P$ mit:*

1. $\tilde{\pi} : M^P \leftrightarrow M^P$
2. $(\forall \dot{x} \in M^P)\ \mathrm{rg}(\dot{x}) = \mathrm{rg}(\tilde{\pi}(\dot{x}))$
3. $(\forall G \subseteq P$ *M-generisch*$)\ \pi[G]$ *M-generisch*
4. $(\forall \dot{x} \in M^P)\ \tilde{\pi}(\dot{x})^{\pi[G]} = \dot{x}^G$
5. $M[G] = M[\pi[G]]$
6. *Für alle alle $\in$-Formeln $\varphi(v_0, \ldots, v_{n-1})$ und $\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1} \in M^P$ gilt:*

$$(\forall p \in P)\ p \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1}) \ \leftrightarrow\ \pi(p) \Vdash \varphi(\tilde{\pi}\dot{x}_0, \ldots, \tilde{\pi}\dot{x}_{n-1})$$

Beweis. Definiere durch Rekursion:

$$\tilde{\pi}(\emptyset) = \emptyset$$
$$\tilde{\pi}(\dot{x}) = \{(\tilde{\pi}(\dot{y}), \pi(p)) \mid (\exists \dot{y} \in M)(\exists p \in P)(\dot{y}, p) \in \dot{x}\}$$

zu 1: Sei $\tilde{\sigma} = \widetilde{\pi^{-1}}$. Nun beweist man durch $\in$-Induktion: $\tilde{\pi} \circ \tilde{\sigma} = \mathrm{id} \restriction M^P$. Sei $\dot{x} \in M^P$, dann:

$$\begin{aligned}
\tilde{\pi}(\tilde{\sigma}(\dot{x})) &= \tilde{\pi}(\{(\tilde{\sigma}(\dot{y}), \sigma(p)) \mid (\exists \dot{y} \in M)(\exists p \in P)(\dot{y}, p) \in \dot{x}\}) \\
&= \{(\tilde{\pi}(\tilde{\sigma}(\dot{y})), \pi(\sigma(p))) \mid (\exists \dot{y} \in M)(\exists p \in P)(\dot{y}, p) \in \dot{x}\}) \\
&\overset{\text{Ind. Vss.}}{=} \{((\dot{y}, p) \mid (\exists \dot{y} \in M)(\exists p \in P)(\dot{y}, p) \in \dot{x}\}) \\
&= \dot{x}
\end{aligned}$$

zu 2: Ergibt sich aus der Definition von $\tilde{\pi}$.

zu 3: Sei $G \subseteq P$ M-generisch. Das $\pi[G]$ ein Filter folgt daraus, dass π ein Automorphismus von P ist. Weiter sei $D \subseteq P$ dicht. Dann ist auch $\pi^{-1}[D]$ dicht (Wenn $p \in P$, dann gibt es ein $q \in D$ mit $\pi(p) <_P q$, dann gilt $p <_P \pi^{-1}(q)$). Dann gibt es ein $q \in \pi^{-1}[D] \cap G$ und es gilt $\pi(q) \in D \cap \pi[G]$.

zu 4: Sei $\dot{x} \in M^P$ und es gelte $(\forall \dot{y} \in M^P)$ $\mathrm{rg}(\dot{y}) < \mathrm{rg}(\dot{x}) \to \dot{y}^G = \tilde{\pi}(\dot{y})^{\pi[G]}$, dann:

$$\begin{aligned}
\pi(\dot{x})^{\pi[G]} &= \{(\dot{y}, p) \mid (\exists \dot{y} \in M^p)(\exists p \in P)(\dot{y}, p) \in \dot{x}\}^{\pi[G]} \\
&= \{\tilde{\pi}(\dot{y})^{\pi[G]} \mid (\exists \dot{y} \in M^p)(\exists p \in G)(\dot{y}, p) \in \dot{x}\} \\
&\overset{\text{Ind. Vss.}}{=} \{(\dot{y})^G \mid (\exists \dot{y} \in M^p)(\exists p \in G)(\dot{y}, p) \in \dot{x}\} \\
&= \dot{x}^G
\end{aligned}$$

zu 5: Dies gilt nach 4.

zu 6: Sei φ ein $\in$-Formel und $\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1} \in M^P$. Es gebe ein $p \in P$ mit: $p \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1})$. Dann:

$$\begin{aligned}
p \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1}) &\leftrightarrow (\forall G \subseteq PM\text{-generisch})\, p \in G \to M[G] \models \varphi(\dot{x}_0^G, \ldots, \dot{x}_{n-1}^G) \\
&\overset{(4)(5)}{\leftrightarrow} (\forall G \subseteq PM\text{-generisch})\, p \in G \to M[\pi[G]] \models \varphi(\dot{x}_0^{\pi[G]}, \ldots, \dot{x}_{n-1}^{\pi[G]}) \\
&\leftrightarrow (\forall G' \subseteq PM\text{-generisch})\, \pi(p) \in G' \to M[G'] \models \varphi(\dot{x}_0^{G'}, \ldots, \dot{x}_{n-1}^{G'}) \\
&\leftrightarrow \pi(p) \Vdash \varphi(\tilde{\pi}(\dot{x}_0), \ldots, \tilde{\pi}(\dot{x}_{n-1}))
\end{aligned}$$

□

Sei im folgenden $\mathcal{G}$ eine Gruppe von Automorphismen auf $(P, <_p, 1_p)$.

Definition 1.2. Sei $\dot{x} \in M^P$. Dann ist:

$$\mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(\dot{x}) = \{\pi \in \mathcal{G} \mid \pi(\dot{x}) = \dot{x}\}$$

Bemerkung 1.3. Sei π ein Automorphismus auf $(P, <_P, 1_P)$ und $\dot{x} \in M^P$, dann gilt:

$$\mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(\pi \dot{x}) = \pi \cdot \mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(\dot{x}) \cdot \pi^{-1}$$

Beweis. Sei $\sigma \in \mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(\pi(\dot{x}))$ dann $\sigma(\pi(\dot{x})) = \pi(\dot{x}) \leftrightarrow \pi^{-1}(\sigma(\pi(\dot{x}))) = \dot{x}$ □

Definition 1.4. Sei $\mathcal{G}$ eine Gruppe. Dann heißt eine Menge $\mathcal{F}$ von Untergruppen von $\mathcal{G}$ *Filter* gdw. Für alle $H, K \in \mathcal{F}$ gilt:

$$\begin{gathered}
\mathcal{G} \in \mathcal{F} \\
H \in \mathcal{F} \wedge H \subset K \to K \in \mathcal{F} \\
H \in \mathcal{F} \wedge K \in \mathcal{F} \to H \cap K \in \mathcal{F} \\
\pi \in \mathcal{G} \wedge H \in \mathcal{F} \to \pi H \pi^{-1} \in \mathcal{F}
\end{gathered}$$

Definition 1.5. Sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf $\mathcal{G}$. Sei $\dot{x} \in M^P$. $\dot{x}$ heißt *symmetrisch* gdw. $\mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(\dot{x}) \in \mathcal{F}$.

Die Klasse HS der *erblich symmetrischen Namen* (hereditarily symmetric names) ist durch Induktion über den Rang von $\dot{x}$ definiert:

$$\mathrm{dom}(\dot{x}) \subset \mathrm{HS} \wedge \dot{x} \text{ ist symmetrisch } \rightarrow \dot{x} \in \mathrm{HS}$$

Bemerkung 1.6.

1. $(\forall x \in M)\check{x} \in \mathrm{HS}$
2. Sei $\dot{x} \in M^P$ ein symmetrischer Name und sei $\pi \in \mathcal{G}$, dann ist $\pi(\dot{x})$ symmetrisch. Damit ist $\pi(\dot{x}) \in \mathrm{HS}$ gdw. $\dot{x} \in \mathrm{HS}$ und $\pi \in \mathcal{G}$ gilt.

Beweis.

1. In allen Filtern $\mathcal{F}$ gilt: $\mathcal{G} \in \mathcal{F}$ und da gilt: $\pi(1_P) = 1_P$ für alle Automorphismen von P ist $\mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(\check{x}) = \mathcal{G} \in \mathcal{F}$.
2. Nach Bemerkung 1.3 ist $\mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(\pi(\dot{x})) = \pi \cdot \mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(\dot{x}) \cdot \pi^{-1}$. Aus der Definition des Filters folgt somit $\mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(\pi(\dot{x})) \in \mathcal{F}$.

□

Definition 1.7 (Symmetrisches Submodell)**.** Sei M ein Grundmodell, $(P, <_P, 1_P) \in M$ ein p.o. set, $\mathcal{G}$ eine Gruppe von Automorphismen von $(P, <_p, 1_p)$ und $\mathcal{F}$ ein Filter auf $\mathcal{G}$. Weiter sei G ein M-generischer Filter. Dann ist ein *symmetrisches Submodell* N_G von $M[G]$ durch:

$$N_G = \{\dot{x}^G | \dot{x} \in \mathrm{HS}\}$$

definiert.

Lemma 1.8.

$$M \subseteq N_G \subseteq M[G]$$

Beweis. $M \subseteq N_G$ ergibt sich aus $(\forall x \in M)\, \check{x} \in \mathrm{HS}$ (vgl. Bemerkung 1.6.1). $N_G \subseteq M[G]$ ergibt sich direkt aus den Definitionen. □

Lemma 1.9. *Es gilt* $\mathrm{Trans}(N_G)$.

Beweis. Sei dazu $x \in N_G$ und $y \in x$. Dann gibt es ein $\dot{x} \in \mathrm{HS}$ mit $\dot{x}^G = x$. Da $\mathrm{dom}(x) \subset \mathrm{HS}$ gilt, gibt es einen $\dot{y} \in \mathrm{HS}$ mit $\dot{y}^G = y$ und somit gilt $y \in N_G$. □

2 Forcing

Definition 2.1. Für eine $\in$-Formel $\varphi(v_0, \dots, v_{n-1})$ und $\dot{x}_0, \dots, \dot{x}_{n-1} \in \mathrm{HS}$ gilt:

$$p \Vdash_{\mathrm{HS}} \varphi(\dot{x}_0, \dots, \dot{x}_{n-1}) \text{ gdw. } (\forall G \subseteq P\ M\text{- generisch})\, p \in G \to N_G \models \varphi(\dot{x}_0^G, \dots, \dot{x}_{n-1}^G)$$

Offensichtlich übertragen sich alle elementaren Eigenschaften von $\Vdash$ auf $\Vdash_{\mathrm{HS}}$. Wir wollen nun ein symmetrisches Forcing-Theorem beweisen. Dazu benötigen wir:

Satz 2.2. *Sei $\varphi(v_0, \dots, v_{n-1})$ und $\psi(v_0, \dots, v_{n-1})$ $\in$-Formeln, für die die Mengen*

$$\{(p, \dot{x}_0, \dots, \dot{x}_{n-1}) \mid p \in P \wedge \dot{x}_0, \dots, \dot{x}_{n-1} \in \mathrm{HS} \wedge p \Vdash_{\mathrm{HS}} \varphi(\dot{x}_0, \dots, \dot{x}_{n-1})\}$$

und

$$\{(p, \dot{x}_0, \dots, \dot{x}_{n-1}) \mid p \in P \wedge \dot{x}_0, \dots, \dot{x}_{n-1} \in \mathrm{HS} \wedge p \Vdash_{\mathrm{HS}} \psi(\dot{x}_0, \dots, \dot{x}_{n-1})\}$$

in M definierbar sind. Für jede symmetrische Erweiterung N_G zu einem M-generischen Filter G und für Name $\dot{x}_0, \dots, \dot{x}_{n-1} \in \mathrm{HS}$ gelte: falls $N_G \models \varphi(\dot{x}_0^G, \dots, \dot{x}_{n-1}^G)$, so gibt es $p \in G$ mit $p \Vdash_{\mathrm{HS}} \varphi(\dot{x}_0, \dots, \dot{x}_{n-1})$. Analoges gelte für ψ. Dann gilt für Namen $\dot{x}_0, \dots, \dot{x}_{n-1} \in \mathrm{HS}$ und $p \in P$:

1. *$p \Vdash_{\mathrm{HS}} (\varphi \wedge \psi)(\dot{x}_0, \dots, \dot{x}_{n-1})$ gdw. $p \Vdash_{\mathrm{HS}} \varphi(\dot{x}_0, \dots, \dot{x}_{n-1})$ und $p \Vdash_{\mathrm{HS}} \psi(\dot{x}_0, \dots, \dot{x}_{n-1})$.*
2. *$p \Vdash_{\mathrm{HS}} \neg\varphi(\dot{x}_0, \dots, \dot{x}_{n-1})$ gdw. $(\forall q <_P p)\ \neg q \Vdash_{\mathrm{HS}} \varphi(\dot{x}_0, \dots, \dot{x}_{n-1})$.*
3. *$p \Vdash_{\mathrm{HS}} \forall v_0 \varphi(v_0, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_{n-1})$ gdw. $(\forall \dot{x}_0 \in \mathrm{HS})\ p \Vdash_{\mathrm{HS}} \varphi(\dot{x}_0, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_{n-1})$.*
4. *Die Menge $\{(p, \dot{x}_0, \dots, \dot{x}_{n-1}) \mid p \in P \wedge \dot{x}_0, \dots, \dot{x}_{n-1} \in \mathrm{HS} \wedge p \Vdash_{\mathrm{HS}} \sigma(\dot{x}_0, \dots, \dot{x}_{n-1})\}$ ist für $\sigma = (\varphi \wedge \psi)(\dot{x}_0, \dots, \dot{x}_{n-1})$, $\sigma = \neg\varphi(\dot{x}_0, \dots, \dot{x}_{n-1})$ und $\sigma = \forall v_0 \varphi(v_0, \dot{x}_0, \dots, \dot{x}_{n-1})$ in M definierbar.*
5. *Wenn $N_G \models (\varphi \wedge \psi)(\dot{x}_0^G, \dots, \dot{x}_{n-1}^G)$, dann existiert ein $p \in G$ mit $p \Vdash_{\mathrm{HS}} (\varphi \wedge \psi)(\dot{x}_0, \dots, \dot{x}_{n-1})$.*
6. *Wenn $N_G \models \neg\varphi(\dot{x}_0^G, \dots, \dot{x}_{n-1}^G)$, dann existiert ein $p \in G$ mit $p \Vdash_{\mathrm{HS}} \neg\varphi(\dot{x}_0, \dots, \dot{x}_{n-1})$.*
7. *Wenn $N_G \models \forall v_0 \varphi(v_0, \dot{x}_0^G, \dots, \dot{x}_{n-1}^G)$, dann existiert ein $p \in G$ mit $p \Vdash_{\mathrm{HS}} \forall v_0 \varphi(\dot{x}_0, \dots, \dot{x}_{n-1})$.*

Hier werden nur die Punkte 3 und 7 bewiesen, da die Beweise ähnlich zu denen des "normalen" Forcing-Theorems sind.

Lemma 2.3. *Sei $\varphi(v_0, \dots, v_{n-1})$ eine $\in$-Formel. Weiter seien $\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_{n-1} \in \mathrm{HS}$, dann gilt:*

$$p \Vdash_{\mathrm{HS}} \forall v_0 \varphi(v_0, x\dot{x}_1 \dots, \dot{x}_{n-1}) \text{ gdw. } (\forall \dot{x}_0 \in M^p) p \Vdash_{\mathrm{HS}} \varphi(\dot{x}_0, \dot{x}_1 \dots, \dot{x}_{n-1})$$

Beweis. Die Implikation von links nach Rechts folgt daraus, dass wenn $p \Vdash_{\mathrm{HS}} \forall v_0\, \varphi(v_0, \dot{x}_1 \ldots, \dot{x}_{n-1})$, dann gilt für alle G M-generisch mit $p \in G$, $N_G \models \forall v_0\, \varphi(v_0, \dot{x}_1^G, \ldots, \dot{x}_{n-1}^G)$. Nach Definition der Modellbeziehung ist dies genau der Fall, wenn für alle $x_0 \in N_G$ gilt: $N_G \models \varphi(x_0, \dot{x}_1^G, \ldots, \dot{x}_{n-1}^G)$. Dies ist aber genau dann der Fall wenn gilt: $(\forall \dot{x}_0 \in \mathrm{HS})\, p \Vdash_{\mathrm{HS}} \varphi(\dot{x}_0^G, \dot{x}_1^G, \ldots, \dot{x}_{n-1}^G)$.

Andererseits sei $(\forall \dot{x}_0 \in \mathrm{HS})\ p \Vdash_{\mathrm{HS}} \varphi(\dot{x}_0, \dot{x}_1 \ldots, \dot{x}_{n-1})$. Betrachte nun ein G M-generisch mit $p \in G$. Dann gilt $(\forall \dot{x}_0 \in \mathrm{HS})\ N_G \models \varphi(\dot{x}_0^G, \dot{x}_1^G, \ldots, \dot{x}_{n-1}^G)$. Somit ist $N_G \models \forall v_0\, \varphi(v_0, \dot{x}_1^G, \ldots, \dot{x}_{n-1}^G)$ und somit $p \Vdash_{\mathrm{HS}} \forall v_0\, \varphi(v_0, \dot{x}_1 \ldots, \dot{x}_{n-1})$. □

Lemma 2.4. *Sei $\varphi(v_0, \ldots, v_{n-1})$ eine $\in$-Formel. Weiter seien $\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{n-1} \in \mathrm{HS}$ und es gebe ein G M-generisch mit: $N_G \models \forall v_o\, \varphi(v_0, \dot{x}_1^G, \ldots, \dot{x}_{n-1}^G)$, dann gibt es ein $p \in G$ mit $p \Vdash_{\mathrm{HS}} \forall v_o\, \varphi(v_0, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{n-1})$.*

Beweis. Sei $N_G \models \forall v_o\, \varphi(v_0, \dot{x}_1^G, \ldots, \dot{x}_{n-1}^G)$. Definiere nun die Menge:

$$D = \{p \in P | (\forall \dot{x}_0 \in \mathrm{HS}) p \Vdash_{\mathrm{HS}} \varphi(\dot{x}_0, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_2) \vee (\exists \dot{x}_0 \in \mathrm{HS}) p \Vdash_{\mathrm{HS}} \neg\varphi(\dot{x}_0, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{n-1})\}$$

Aufgrund der Definierbarkeit der Frocing-Relation ist $D \in M$.

Behauptung: D ist dicht in P

Sei $r \in P$. Wenn gilt $(\forall \dot{x}_0 \in \mathrm{HS}) r \Vdash_{\mathrm{HS}} \varphi(\dot{x}_0, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{n-1})$, so ist $r \in D$. Andernfalls wähle ein $\dot{x}_0 \in \mathrm{HS}$, mit $\neg r \Vdash_{\mathrm{HS}} \varphi(\dot{x}_0, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{n-1})$ und ein H M-generisch, mit $M[H] \models \neg\varphi(\dot{x}_0^H, \dot{x}_1^H, \ldots, \dot{x}_{n-1}^H)$. Dann gibt es eine Bedingung $s \in H$ mit $s \Vdash_{\mathrm{HS}} \neg\varphi(\dot{x}_0, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{n-1})$. Sei $p \leq_P r, s$. Dann gilt $p \Vdash_{\mathrm{HS}} \neg\varphi(\dot{x}_0, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{n-1})$. Was zu zeigen war

Nun können wir ein $p \in G \cap D$ wählen. Angenommen es gelte $(\exists \dot{x}_0 \in \mathrm{HS})\ p \Vdash_{\mathrm{HS}} \neg\varphi(\dot{x}_0, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{n-1})$. Dann wähle $\dot{x}_0 \in \mathrm{HS}$ mit $p \Vdash_{\mathrm{HS}} \neg\varphi(\dot{x}_0, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{n-1})$. Da $p \in G$ gilt dann $N_G \models \neg\varphi(\dot{x}_0^G, \dot{x}_1^G, \ldots, \dot{x}_{n-1}^G)$, im Widerspruch zur Beweisannahme. Somit muss gelten $(\forall \dot{x}_0 \in \mathrm{HS})\, p \Vdash_{\mathrm{HS}} \varphi(\dot{x}_0, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{n-1})$. □

Die atomaren Fälle werden wie beim "normalen" Forcing behandelt. Damit ergibt sich:

Satz 2.5 (Symmetrisches Forcing Theorem)**.** *Für G generisch, $\varphi(v_0, \ldots, v_{n-1})$ eine $\in$-Formel und $\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1} \in \mathrm{HS}$ gilt:*

$$N_G \models \varphi(\dot{x}_0^G, \ldots, \dot{x}_{n-1}^G) \text{ gdw. } (\exists p \in G) p \Vdash_{\mathrm{HS}} \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1})$$

Für den Beweis der ZF-Axiome benötigen wir:

Bemerkung 2.6. Da für alle Automorphismen π von $(P, <_P, 1_P)$ $\pi(\mathrm{HS}) = \mathrm{HS}$ gilt, überträgt sich das Symmetrien Lemma 1.1 auf N_G und $\Vdash_{\mathrm{HS}}$.

3 ZF in N_G

Lemma 3.1. *$(Ext)^{N_G}$, $(Fund)^{N_G}$, $(Inf)^{N_G}$ und $(Ex)^{N_G}$*

Beweis. Dies gilt, da N_G eine transitive Klasse ist und $M \subseteq N_G$ gilt. □

Lemma 3.2. $(Paar)^{N_G}$

Beweis. Seien $x, y \in N_G$ und seien $\dot{x}, \dot{y} \in \mathrm{HS}$ Namen für x und y. Dann ist $\dot{z} = \{(\dot{x}, 1_P), (\dot{y}, 1_P)\}$ ein Name für $z = \{x, y\}$. Weiter ist $\mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(\dot{z}) \supseteq \mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(\dot{x}) \cap \mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(\dot{y})$ und damit $\mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(\dot{z}) \in \mathcal{F}$. □

Lemma 3.3. $(Aus)^{N_G}$

Beweis. Sei $\varphi(x, \vec{p})$ eine $\in$-Formel und $x, \vec{p} \in N_G$. Definiere $y := \{z \in x | N_G \models \varphi(z, \vec{p})\}$. Seien $\dot{x}, \dot{\vec{p}} \in \mathrm{HS}$ Namen für x und $\vec{p}$, dann definiere:

$$\dot{y} := \{(\dot{z}, q) \mid \dot{z} \in \mathrm{dom}(\dot{x}) \wedge q \in P \wedge q \Vdash_{\mathrm{HS}} \dot{z} \in \dot{x} \wedge \varphi(\dot{z}, \dot{\vec{p}})\}$$

Es gilt $\dot{y} \in M$, da $\mathrm{dom}(\dot{x}), P \in M$, $(Aus)^N$ und die Forcing-Relation in M definierbar ist.

Behauptung: $\dot{y}^G = y$

Zu "$\subseteq$": Sei $z \in \dot{y}^G$. Dann gibt es nach der Definition von $\dot{y}$ ein Paar $(\dot{z}, q)$ mit $\dot{z}^G = z$, $q \in G$ und $q \Vdash_{\mathrm{HS}} \dot{z} \in \dot{x} \wedge \varphi(\dot{z}, \dot{\vec{p}})$. Nach dem Forcing-Theorem gilt dann aber: $N_G \models \dot{z}^G \in \dot{x}^G \wedge \varphi(\dot{z}^G, \dot{\vec{p}}^G)$ und somit $z = \dot{z}^G \in y$.

Zu "$\supseteq$": Sei $z \in y$ und sei $\dot{z} \in \mathrm{HS}$ ein Name für z. Da $z \in y$ ist, gilt $N_G \models \varphi(y, \vec{p})$, nach dem Forcing-Theorem gibt es ein $r \in G$ mit $r \Vdash_{\mathrm{HS}} \varphi(\dot{y}, \dot{\vec{p}})$. Weiter gilt $N_G \models z \in x$. Damit gibt es ein $t \in G$ mit $t \Vdash_{\mathrm{HS}} \dot{z} \in \dot{x}$. Sei $q \in G$ eine gemeinsame Verstärkung von s und t. Dann ist $(\dot{z}, q) \in \dot{y}$ und somit $z = \dot{z}^G \in \dot{y}^G$.

Es bleibt zu zeigen, dass $\dot{y} \in \mathrm{HS}$ ist. Zunä chst gilt $\mathrm{dom}(\dot{y}) \subset \mathrm{HS}$, da $\mathrm{dom}(\dot{y}) \subseteq \mathrm{dom}(\dot{x}) \subset \mathrm{HS}$. Aufgrund der Eigenschaften eines Filters reicht es aus zu zeigen, dass $\mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(\dot{y}) \supseteq \mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(\dot{x}) \cap \mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(\dot{\vec{p}})$ gilt. Dazu sei $\pi \in \mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(\dot{x}) \cap \mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(\dot{\vec{p}})$. Dann:

$$\begin{aligned}
\pi(\dot{y}) =& \pi(\{(\dot{z}, q) \mid \dot{z} \in \mathrm{dom}(\dot{x}) \wedge q \in P \wedge q \Vdash_{\mathrm{HS}} \dot{z} \in \dot{x} \wedge \varphi(\dot{z}, \dot{\vec{p}})\}) \\
=& \{(\pi(\dot{z}), \pi(q)) \mid \dot{z} \in \mathrm{dom}(\dot{x}) \wedge q \in P \wedge q \Vdash_{\mathrm{HS}} \dot{z} \in \dot{x} \wedge \varphi(\dot{z}, \dot{\vec{p}})\}) \\
=& \{(\dot{z}', q') \mid \dot{z} \in \mathrm{dom}(\dot{x}) \wedge \dot{z}' = \pi(\dot{z}) \wedge q \in P \wedge q' = \pi(q) \wedge q \Vdash_{\mathrm{HS}} \dot{z} \in \dot{x} \wedge \varphi(\dot{z}, \dot{\vec{p}})\} \\
\overset{1.1.6}{=}& \{(\dot{z}', q') \mid \dot{z} \in \mathrm{dom}(\dot{x}) \wedge \dot{z}' = \pi(\dot{z}) \wedge q \in P \wedge q' = \pi(q) \wedge \pi(q) \Vdash_{\mathrm{HS}} \pi(\dot{z}) \in \pi(\dot{x}) \wedge \varphi(\pi(\dot{z}), \pi(\dot{\vec{p}}))\} \\
=& \{(\dot{z}', q') \mid \dot{z} \in \mathrm{dom}(\dot{x}) \wedge \dot{z}' = \pi(\dot{z}) \wedge q \in P \wedge q' = \pi(q) \wedge p' \Vdash_{\mathrm{HS}} \dot{z}' \in \dot{x} \wedge \varphi(\dot{z}', \dot{\vec{p}})\} \\
=& \{(\dot{z}', q') \mid \dot{z}' \in \mathrm{dom}(\dot{x}) \wedge q' \in P \wedge q' \Vdash_{\mathrm{HS}} \dot{z}' \in \dot{x} \wedge \varphi(\dot{z}', \dot{\vec{p}})\} \\
=& \dot{y}
\end{aligned}$$

Somit ist $\pi \in \mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(\dot{y})$. □

Lemma 3.4. $(\bigcup -Axiom)^{N_G}$

Beweis. Sei $x \in N_G$ und $\dot{x} \in \mathrm{HS}$ ein Name für x. Sei $S := \bigcup\{\mathrm{dom}(\dot{y}) | \dot{y} \in \mathrm{dom}(\dot{x})\}$. Für alle $\pi \in \mathrm{sym}(\dot{X})$ Gilt: $\pi(S) = S$. Sei Nun $y := \{s^G \mid s \in S\}$. Dieses hat den erblich symmetrischen Namen $\dot{y} := \{(t, 1_P) | t \in S\}$. Somit gilt $y \in N_G$ und $y = \bigcup x$, da wenn $s \in z \in x$ gilt, dann ist $\dot{s} \in \mathrm{dom}(\dot{z})$ und somit $\dot{s}^G \in y$. Andererseits sei $s \in y$, dann gibt es $\dot{s} \in S$ mit $\dot{s}^G = s$ und somit $\dot{s} \in \mathrm{dom}(\dot{z})$ für ein $\dot{z} \in \mathrm{dom}(\dot{x})$. □

Lemma 3.5. $(Pot)^{N_G}$

Beweis. Sei $a \in N$. Es genügt zu zeigen das gilt: $N_G \cap \mathfrak{P}(a) \in N_G$. Sei dazu $\dot{a} \in \mathrm{HS}$ ein Name für a. Dann definiere:

$$s := \{\dot{z} \mid \dot{z} \subseteq \mathrm{dom}(\dot{a}) \times P\}$$

Es gilt $s \in M$, da $(Pot)^M$ und $\dot{a} \times P \in M$ ist. Dies ist die Menge der kanonischen Teilmengen von $\dot{a}$. Wir setzen nun: $t := \{(\dot{z}, 1_P) \mid \dot{y} \in s \cap \mathrm{HS}\}$. $t \in M$, da $s \in M$, $(Aus)^M$ und HS eine definierbare Klasse in M ist.

Behauptung: $t \in \mathrm{HS}$

Es genügt zu zeigen, dass gilt: $\mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(t) \supseteq \mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(\dot{a})$. Sei dazu $\pi \in \mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(\dot{a})$. Dann:

$$\begin{aligned}
\pi(t) &= \pi(\{(\dot{z}, 1_P) \mid \dot{z} \in s \cap \mathrm{HS}\} \\
&= \pi(\{(\dot{z}, 1_P) \mid z \subseteq (\mathrm{dom}(\dot{a}) \times P) \cap \mathrm{HS}\}) \\
&= \{(\pi(\dot{z}), \pi(1_P)) \mid z \subseteq (\mathrm{dom}(\dot{a}) \times P) \cap \mathrm{HS}\} \\
&= \{(\dot{z}', 1_P) \mid z' \subseteq \pi((\mathrm{dom}(\dot{a}) \times P) \cap \mathrm{HS}\ )\} \\
&= \{(\dot{z}', 1_P) \mid z' \subseteq (\mathrm{dom}(\dot{a}) \times P) \cap \mathrm{HS}\} \\
&= t
\end{aligned}$$

$\mathrm{dom}(t) \subset \mathrm{HS}$ gilt aufgrund der Definition.

Behauptung: $\mathfrak{P}(a) \cap N_G \subseteq t^G$

Sei $x \subseteq a$ mit $x \in N_G$. Sei $\dot{x} \in \mathrm{HS}$ ein Name für x. Wir definieren einen Namen $\dot{y}$ für x durch: $\dot{y} := \{(\dot{z}, p) \in (\mathrm{dom}(\dot{a}) \times P) \mid p \Vdash_{\mathrm{HS}} \dot{z} \in \dot{x}\}$. Da $(Aus)^M$ und $\mathrm{dom}(\dot{a}) \times P \in M$ gilt $y \in M^P$. Wenn nun noch $\dot{y} \in \mathrm{HS}$ gilt, dann gilt $\dot{y} \in s$ und somit $(\dot{y}, 1_P) \in t$, was

$$\dot{y}^G \in t^G$$

impliziert.

$\mathrm{dom}(\dot{y}) \subset \mathrm{HS}$ gilt aufgrund der Definition. Sei nun $\pi \in \mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(\dot{x}) \cap \mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(\dot{a})$. Dann:

$$\begin{aligned}
\pi(\dot{y}) &= \pi(\{(\dot{z}, p) \in \mathrm{dom}(\dot{a}) \times P \mid p \Vdash_{\mathrm{HS}} \dot{z} \in \dot{x}\}) \\
&= \{(\pi(\dot{z}), \pi(p)) \mid (\dot{z}, p) \in \mathrm{dom}(\dot{a}) \times P \wedge p \Vdash_{\mathrm{HS}} \dot{z} \in \dot{x}\} \\
&= \{(\dot{z}', p') \mid (\dot{z}, p) \in \mathrm{dom}(\dot{a}) \times P \wedge z' = \pi(z) \wedge p' = \pi(p) \wedge p \Vdash_{\mathrm{HS}} \dot{z} \in \dot{x}\} \\
&\overset{1.1.6}{=} \{(\dot{z}', p') \mid (\dot{z}, p) \in \mathrm{dom}(\dot{a}) \times P \wedge z' = \pi(z) \wedge p' = \pi(p) \wedge p' \Vdash_{\mathrm{HS}} \dot{z}' \in \dot{x}\} \\
&= \{(\dot{z}', p') \in \mathrm{dom}(\dot{a}) \times p \mid p' \Vdash_{\mathrm{HS}} \dot{z} \in \dot{x}\} \\
&= \dot{y}
\end{aligned}$$

Damit gilt: $\mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(\dot{x}) \cap \mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(\dot{a}) \subseteq \mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(\dot{y}) \in \mathcal{F}$.

Es bleibt zu zeige, dass $\dot{y}$ ein Name für x ist. Es muss also gelten:

$$\dot{x}^G = \dot{y}^G$$

Zu "$\subseteq$": Sei $z \in \dot{x}^G$. Es gilt $\dot{x}^G \subseteq a = \dot{a}^G$, somit ist auch $z \in \dot{a}^G$. Damit gibt es nach der Definition von $\dot{a}^G$ ein Paar $(\dot{z}, q) \in (\mathrm{dom}(\dot{a}) \times P)$ mit $q \in G$ und $\dot{z}^G = z$. Wir erhalten: $\dot{z}^G \in \dot{x}^G$, somit $(\dot{z}^G \in \dot{x}^G)^{N_G}$. Nach dem symmetrischen Forcing-Theorem gibt es dann ein $p \in G$ mit $p \Vdash_{\text{HS}} \dot{z} \in \dot{x}$. Dann ist $(\dot{x}, p) \in \dot{y}$. Wegen $p \in G$ folgt damit $\dot{z}^G \in \dot{x}^G$, was $z \in \dot{y}^G$ bedeutet. Damit ist die Inklusion gezeigt.

Zu "$\supseteq$": Sei $z \in \dot{y}^G$. Dann existiert nach der Definition von $\dot{y}^G$ und $\dot{y}$ ein Paar $(\dot{z}, p) \in \text{dom}(\dot{a}) \times P$ mit $p \Vdash_{\text{HS}} \dot{z} \in \dot{x}$, $p \in G$ und $\dot{z}^G = z$. Aus $p \Vdash_{\text{HS}} \dot{z} \in \dot{x}$ folgt mit Hilfe des Forcing-Theorems $(\dot{z}^G \in \dot{x}^G)^{N_G}$. Somit gilt: $z \in \dot{x}^G$. Was zu zeigen war.

Da $x \subseteq a$ eine Σ_0 Formel ist, gilt:

$$\mathfrak{P}(a) \cap N_G = \{z \in t^G \mid z \subseteq a\} = \{z \in t^G \mid (z \subseteq a)^{N_G}\}$$

Da $(Aus)^{N_G}$ gilt ist die ein Element von N_G, was zu zeigen war. $\square$

Lemma 3.6. $(Ers)^{N_G}$

Beweis. Sei $\varphi(u, v, \vec{p})$ eine funktionale $\in$-Formel und sei $a, \vec{p} \in N_G$. Seien $\dot{a}, \dot{\vec{p}} \in \text{HS}$ Namen für a und $\vec{p}$ Um zu zeigen das gilt: $y = \{v \mid N_G \models (\exists u \in a)\, \varphi(u, v, \vec{p})\} \in N_G$, reicht es aus ein $s \in N_G$ mit $y \subseteq s$ zu finden, da $(Aus)^{N_G}$ gilt.

Definiere $\dot{y} := \{(\dot{v}, q) \mid q \Vdash_{\text{HS}} (\exists u \in \dot{a}) \varphi(u, \dot{v}, \dot{\vec{p}})\}$. $\dot{y} \in M^P$, da $(Rep)^M$ gilt und die Forcing-Relation im Grundmodell definierbar ist.

Sei $\alpha \in \text{Ord}$ mit $\dot{y} \subseteq V_\alpha \cap \text{HS}$. Für alle $\pi \in \mathcal{G}$ gilt dann: $\pi(V_\alpha \cap \text{HS}) = V_\alpha \cap \text{HS}$, da π den Rang erhält. Setze nun $s = V_\alpha \cap \text{HS}$.

Nun bleibt zu zeigen, das für alle $v \in y$ auch $v \in (V_\alpha \cap \text{HS})^G$ gilt. Sei dazu $v \in y$ und $\dot{v} \in \text{HS}$ ein Name für v. Dann gilt $N_G \models (\exists u \in a)\, \varphi(u, v, \vec{p})$. Nach dem Forcing-Theorem gibt es dann ein $q \in G$ mit $q \Vdash_{\text{HS}} (\exists u \in a)\, \varphi(u, \dot{v}, \dot{\vec{p}})$. Dann ist das Paar $(\dot{v}, q) \in \dot{y} \subseteq V_\alpha \cap \text{HS}$ und somit $u \in (V_\alpha \cap \text{HS})^G$. Was zu zeigen war. $\square$

Satz 3.7. *$(N_G, \in)$ ist ein transitives Modell von* ZF *und es gilt $M \subseteq N_G \subseteq M[G]$.*

Bemerkung 3.8. Im allgemeinen gilt in N nicht das Auswahl-Axiom und es gilt nicht $G \in N_G$.