Permutationsmodelle

von Gero Mayr-Gollwitzer
im Rahmen des Forcing-Seminars im SS 2007 an der Universität Bonn

In diesem Vortrag beschäftigen wir uns mit einer anderen Theorie der Mengenlehre, genannt ZFA - Mengenlehre mit Atomen. Wie der Name schon sagt, gibt es in dieser Theorie zusätzliche Elemente, Atome genannt, die selber keine weiteren Elemente besitzen und in diesem Sinne atomar genannt werden können.
Ziel wird es dann sein, Modelle dieser Theorie zu konstruieren, in denen das Auswahlaxiom verletzt ist. Die wesentliche Idee dabei ist, dass es - im Gegensatz zu ZF - nichttriviale Automorphismen des Universums gibt, die z.B. durch Permutationen der Atome induziert werden. Letzlich wird die Existenz solcher Automorphismen Modelle von ZFA + $\neg$ AC liefern.
Im nächsten Vortrag wird dann mit Forcing-Methoden die Situation auf die ZF-Situation übertragen und die Unabhängigkeit des Auswahlaxioms von ZF zeigen.

Wir wollen die Theorie ZFA nun genauer aufbauen. Die Sprache von ZFA besteht nicht nur aus dem Element-Symbol, sondern enthält auch ein Konstantensymbol A, mit dem die Menge der Atome bezeichnet werden soll. Die Axiome von ZFA stimmen nun im Wesentlichen mit den ZF-Axiomen überein, nur dass man die Sonderrolle der Atome berücksichtigen muss. Bei der Formulierung der Axiome sollen die üblichen Abkürzungen für Klassenterme benutzt werden.

Die Axiome lauten nun also :

(Atom) $\forall x \in A\ \forall y\ y \notin x$
(Ex) $\exists x \notin A\ \forall y\ y \notin x$
(Ext$_A$) $\forall x \notin A\ \forall y \notin A\ (\forall z\ (z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y)$
(Pair) $\forall x \forall y \exists z \forall u\ (u \in z \leftrightarrow u = x \vee u = y)$
(Union) $\forall x \exists y\ y = \bigcup x$
(Pot) $\forall x \exists y\ y = \mathfrak{P}(x)$
(Inf) $\exists x (0 \in x \wedge \forall n \in x\ n+1 \in x)$
Sei nun jeweils ϕ eine Formel der ZFA-Sprache. Dann nehme man in das Axiomensystem auf :
(Aus$_A$) $\forall x_0, \ldots, x_n \forall x \exists y\ y = \{z \in x \mid \phi(z, x_0, \ldots, x_n)\}$
(Rep$_A$) $\forall x (f \text{ ist Funktion} \to \exists y\ y = f[x])$
(Found$_A$) $\forall x_0, \ldots, x_n\ (\exists x \phi(x, x_0, \ldots, x_n) \to \exists x \forall y\ (y \in x \to \neg\phi(y, x_0, \ldots, x_n)))$

Wir wollen nun erst einmal die Konsistenz dieser Axiome mit ZF zeigen, indem wir konkret ein Modell von ZFA konstruieren. Uns soll es aber für die spätere Anwendung direkt um das spezielle Modell HS der erblich symmetrischen Mengen gehen. Zunächst wollen wir aber direkt mit einer an die Von-Neumann-Hierarchie erinnernden Konstruktion ein erstes Modell von ZFA bauen :

Dazu nehmen wir uns in einem Modell von ZF (o.b.d.A. im Weiteren V) eine Menge A von Elementen gleichen Rangs $A \subseteq V_{\alpha+1} \setminus V_\alpha$ und eine Menge $E \in (V_{\alpha+1} \setminus V_\alpha) \setminus A$. Ersteres werden die Atome, letzteres die leere Menge in unserem Modell werden. Setze nun (per Induktion [in V!]):

$$
\begin{aligned}
W_0 &= A \cup \{L\} \\
W_{\alpha+1} &= \mathfrak{P}(W_\alpha) \setminus \{\emptyset\} \\
W_\lambda &= \bigcup_{\alpha<\lambda} W_\alpha \\
W &= \bigcup_{\alpha \in On} W_\alpha
\end{aligned}
$$

Wie schon erwähnt werden Permutationen eine herausragende Rolle spielen. Deshalb nun einige Bemerkungen hierzu :
Sei $G = S(A) = \{\pi | \pi : A \leftrightarrow A\}$ die symmetrische Gruppe über A. Nun lässt sich jedes $\pi \in G$ per Rekursion zu einem $\in -$Automorphismus $\bar{\pi}$ von W erweitern : $\bar{\pi}(E) = E$, $\bar{\pi}(a) = \pi(a)$ für $a \in A$ und $\bar{\pi}(x) = \{\bar{\pi}(y) \mid y \in x\}$. Das Außergewöhnliche ist nun, dass wir i.A. nichttriviale Automorphismen des (ZFA-)Universums erhalten, was für ZF nicht möglich ist! Für jedes $x \in W$ definiere nun $G_x = \{\pi \in G \mid \bar{\pi}(x) = x\}$, die Isotropiegruppe von x. Wie man leicht sieht, bildet sie eine Untergruppe von G. (Beachte dazu $\bar{\pi} \circ \bar{\sigma} = \overline{\pi \circ \sigma}$ und $\overline{\mathrm{id}} = \mathrm{id}$).

Wir kommen nun zu den wesentlichen Definitionen des Vortrags :

Definition 1:
Sei G eine Gruppe. Eine Menge $\mathfrak{F}$ von Untergruppen von G heißt *Filter* auf G, wenn für alle Untergruppen H, K von G gilt:

(i) $G \in \mathfrak{F}$

(ii) Für $H \in \mathfrak{F}$, $H \subseteq K$ ist $K \in \mathfrak{F}$

(iii) Für $H, K \in \mathfrak{F}$ ist $H \cap K \in \mathfrak{F}$

(iv) Ist $g \in G$ und $H \in \mathfrak{F}$, so ist $gHg^{-1} \in \mathfrak{F}$

Ist $G_x \in \mathfrak{F}$, so heißt x *symmetrisch.*
Ist jedes Atom symmetrisch, so setze

$$U = \{x | \text{ jedes } z \in TC(\{x\}) \text{ ist symmetrisch}\}$$

Beachte, dass hierbei der ZFA-Transitive Abschluss gemeint ist, den man genau wie für ZF definiert. U heißt ein *Permutationsmodell* und die Elemente von HS heißen *erblich symmetrisch.*

Wir wollen uns nun auf den Fall beschränken, in dem $G = S(A)$ ist und $\mathfrak{F}$ der von den Untergruppen $\text{fix}(F) = \{\pi \in G | \pi(x) = x$ für alle $x \in F)$ mit $F \subseteq A$ endlich erzeugte Filter. Wir erhalten dann folgende Bedingungen :

Definition 2:
Sei $x \in W$.
(i) Die Menge x heißt *symmetrisch*, falls es ein endliches $A_0 \subseteq A$ gibt mit $\{\pi \in G \mid \pi|_{A_0} = \text{id}_{A_0}\} \subseteq G_x$. Ein solches A_0 heißt *Träger* von x.
(ii) $S = \{x \in W | x$ ist symmetrisch$\}$ heißt die Klasse der symmetrischen Mengen.
(iii) Eine Menge x heißt *erblich symmetrisch*, falls $TC(\{x\}) \cap W \subseteq S$, falls also jedes Element des transitiven Abschlusses von $\{x\}$ schon symmetrisch ist.
(iv) $HS = \{x | x$ ist erblich symmetrisch$\}$ ist die Klasse der erblich symmetrischen Mengen und $(HS, \in, A)$ das (Fraenkelsche) *Permutationsmodell*.

Um von bestimmten Mengen zeigen zu können, dass sie erblich symmetrisch sind, ist folgendes Lemma äußerst nützlich :

Lemma 1:
Ist $x \subseteq HS$ und $x \in S$, so $x \in HS$. Mit anderen Worten : Ist eine Teilmenge von HS symmetrisch, so ist sie schon erblich symmetrisch.
Beweis:
Wir haben :

$$TC(x) = x \cup \bigcup_{u \in x} TC(u)$$

("$\supseteq$" : folgt aus der Definition. "$\subseteq$": beachte, dass die RHS eine transitive Menge ist, die x enthält :
Sei $z \in y \in x \cup \bigcup_{u \in x} TC(u)$. Ist $y \in x$, so $z \in TC(y) \subseteq \bigcup_{u \in x} TC(u)$. Ist andererseits $y \in \bigcup_{u \in x} TC(u)$, so $z \in y \in TC(v)$ für ein $v \in x$, also $z \in TC(v)$, denn $TC(\{v\})$ ist transitiv.
Es folgt :

$$\begin{aligned} TC(\{x\}) \cap W &= \{x\} \cup (TC(x) \cap W) \\ &= \{x\} \cup (x \cup \bigcup_{u \in x} (TC(u) \cap W)) \\ &\subseteq \{x\} \cup (x \cup \bigcup_{u \in x} (TC(\{u\}) \cap W))) \\ &\subseteq S \end{aligned}$$

Nun ist HS W-transitiv, d.h. $\forall x, y \in W x \in y \in HS \to x \in HS$: Für $u \in x$ ist $TC(\{u\}) \cap W \subseteq TC(\{y\}) \cap W \subseteq S$.

Bemerkung:
Es gilt $A \cup \{E\} \subseteq HS$:
Beweis: Beachte zunächst $x \in V_\beta \to TC(x) \subseteq V_\beta$. Nun ist für $x \in W \setminus W_0$ $x \notin V_{\alpha+1}$, denn :
Ist x $\in$-minimales Gegenbeispiel, so $x \subseteq V_\alpha$. Sei β minimal derart, dass $x \in W_{\beta+1}$, $x \subseteq W_\beta$.
Ist $\beta = 0$, so $x \subseteq A \cup \{E\}$, also gibt es $y \in A \cup \{E\}$, $y \in x \subseteq V_\alpha$. Widerspruch zu $y \in A \subseteq V_{\alpha+1} \setminus V_\alpha$!
Für $\beta > 0$ kann man aber $y \in x$, $y \in W_\beta \setminus W_0$ wählen, d.h. $y \in x \subseteq V_\alpha \subseteq V_{\alpha+1}$. Erneut ein Widerspruch, diesmal zur Minimalität von x.
Nun ergibt sich für $x \in A \cup \{E\}$ dass $TC(\{x\}) \cap W \subseteq V_{\alpha+1} \cap W \subseteq W_0$. Da für $x \in W_0$ nun gilt $TC(\{x\}) = \{x\} \cup x \cup \bigcup_{u \in x} TC(u) \subseteq \{x\} \cup V_\alpha$ folgt für $y \in TC(\{x\} \cap W$ $y = x$ und damit $TC(\{x\}) \cap W = \{x\}$. Es genügt also $x \in S$ zu zeigen, was aber wegen $x \in A \cup \{E\}$ trivial ist.

Lemma 2:
Die wie oben gewonnenen $\bar{\pi}$ schränken sich zu (modelltheoretischen) Automorphismen von $(HS, \in, A)$ ein, m.a.W.: $\pi|_{HS} : HS \to HS$ ist bijektiv und es gilt $x \in y \leftrightarrow \bar{\pi}(x) \in \bar{\pi}(y)$ sowie $\bar{\pi}(A) = A$.
Beweis:
Wie schon in der Algebra zeigt man leicht $G_{\bar{\pi}(x)} = \pi G_x \pi^{-1}$. Angenommen es gäbe ein (o.B.d.A) $\in$-minimales $x \in HS$ mit $\bar{\pi}(x) \notin HS$. Wegen $\bar{\pi}(A \cup \{E\}) = A \cup \{E\}$ ist $x \in W \setminus W_0$. Per definitionem ist nun $\bar{\pi}(x) = \{\bar{\pi}(y) | y \in x\} \subseteq HS$ wegen der Minimalität von x. Es bleibt die Symmetrie von x zu zeigen. Ist A_0 Träger von x, so ist $\pi[A_0]$ Träger von $\bar{\pi}(x)$, $\bar{\pi}(x)$ mithin symmetrisch, denn :

$$\begin{aligned} G_{\bar{\pi}(x)} &= \pi G \pi^{-1} \\ &\subseteq \pi \circ \{\sigma \mid \sigma|_{A_0} = \mathrm{id}|_{A0}\} \circ \pi^{-1} \\ &= \{\tau \mid \tau|_{\pi[A_0]} = \mathrm{id}|_{\pi[A_0]}\} \end{aligned}$$

Nach Lemma 1 ist dann aber $\bar{\pi}(x) \in HS$, im Widerspruch zu unserer Annahme. $\bar{\pi}$ ist aber auch bijektiv, denn wegen $\bar{\pi} \circ \overline{\pi^{-1}} = \overline{\mathrm{id}} = \mathrm{id}$ und umgekehrt ist $\overline{\pi^{-1}}$ eine Umkehrabbildung zu $\bar{\pi}$. Schließlich ist $\bar{\pi}(A) = \pi(A) = A$ nach Definition und es gilt $x \in y \to \bar{\pi}(x) \in \bar{\pi}(y)$, denn $\bar{\pi}(y) = \{\bar{\pi}(x) \mid x \in y\}$ (beachte $y \notin A, y \neq E$). Insgesamt ist $\bar{\pi}$ also ein Automorphismus von $(HS, \in, A)$.

Lemma 3:
Sei ϕ eine $\in -A$-Formel, $y_0, \ldots, y_n \in HS$, $\pi \in G$. Sei

$$t = \{x \in HS \mid (HS, \in, A) \models \phi(x, y_0, \cdots, y_n)\}$$

Ist $t \in V \setminus \{\emptyset\}$, so ist $t \in W \setminus W_0 \cap HS$ und

$$\bar{\pi}(t) = \{x \in HS \mid (HS, \in, A) \models \phi(x, \bar{\pi}(y_0), \ldots, \bar{\pi}(y_n))\}$$

Beweis:
Wegen $t \neq \emptyset$ ist $t \in W$, also berechnet sich $\bar{\pi}(t)$ zu:

$$\begin{aligned}\bar{\pi}(t) &= \{\bar{\pi}(x) \mid x \in HS \text{ und } (HS, \in, A) \models \phi(x, y_0, \ldots, y_n)\} \\ &= \{\bar{\pi}(x) \mid \bar{\pi}(x) \in HS \text{ und } (HS, \in, A) \models \phi(\bar{\pi}(x), \bar{\pi}(y_0), \ldots, \bar{\pi}(y_n))\} \\ &= \{x \mid x \in HS \text{ und } (HS, \in, A) \models \phi(x, \bar{\pi}(y_0), \ldots, \bar{\pi}(y_n))\}\end{aligned}$$

Wähle nun endliche Träger $A_0, \ldots A_n$ für $y_0, \ldots, y_n$ und setze $A' = \bigcup_{0 \leq i \leq n} A_i$. Ist dann $\sigma \in G$, so dass $\sigma|_{A'} = \mathrm{id}_{A'}$, so folgt :

$$\bar{\sigma}(t) = \{\bar{x} \in HS \mid (HS, \in, A) \models \phi(x, y_0, \ldots, y_n)\} = t$$

Also $\bar{\sigma} \in G_t$ und t ist symmetrisch, mithin nach Lemma 1 erblich symmetrisch.

Nun gilt es das folgende Theorem zu beweisen :

Theorem
Es gilt $(HS, \in, A) \models$ ZFA.
Beweis:
(Atom)
Klar nach Definition, da wir $\in$ auf W eingeschränkt haben.
(Ex)
Offenbar erfüllt gerade E die gewünschte Eigenschaft
(Ext$_A$)
Seien $x, y \in HS \setminus A$, $\forall z \in HS(z \in x \leftrightarrow z \in y)$. Sei o.B.d.A. $x \neq E$, $x \subseteq W_\alpha$. Da HS W-transitiv ist, ist $x \subseteq HS$. Nach Voraussetzung folgt nun $y \neq E$, $y \subseteq W_\beta$ für ein $\beta \in Ord$ und $y \subseteq HS$. Da nun x und y Teilmengen von HS sind, erhalten wir $\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y)$, also $x = y$ mit dem Extensionalitätsaxiom in V.
(Pair)
Seien $x, y \in HS$. Wir zeigen $\{x, y\} \in S$. Nach dem Lemma genügt dies offenbar. Seien dazu A_x, A_y Träger von x, y, dann ist $A' = A_x \cup A_y$ Träger von $\{x, y\}$, denn für $\pi|_{A'} = \mathrm{id}|A'$ ist $\pi(\{x, y\}) = \{\pi(x), \pi(y)\} = \{x, y\}$.
(Union)
Sei $x \in HS$ und sei

$$y_0 = \{z \in HS \mid (HS, \in, A) \models \exists u \in x\ z \in u\}$$

Ist $y_0 = \emptyset$, so setze $y = L \in HS$, ansonsten ist nach Lemma 3 $y_0 \in HS$ und man setze $y = y_0$. In jedem Fall gilt dann :

$$z \in y \leftrightarrow (HS, \in, A) \models \exists u \in xz \in u$$

und das Vereinigungsaxiom gilt in HS.

(Pot)
Sei $x \in HS$. Die Menge

$$y = \{z \in HS \mid (HS, \in, A) \models z \subseteq x\}$$

erfüllt $x \in y$, $y \neq \emptyset$ und $y \in HS$ nach Lemma 3. y ist aber gerade die in (Pot) gesuchte Menge in HS.
(Aus_A)
Sei ϕ eine $\in -A-$Formel, $x, v_0, \ldots, v_n \in HS$. Betrachte

$$y_0 = \{z \in HS \mid (HS, \in, A) \models z \in x \wedge \phi(z, v_0, \ldots, v_n)\}.$$

Dann ist entweder $y = \emptyset$ und $y = L$ erfüllt die entsprechende Instanz des Aussonderungsschemas, oder $y = y_0$ tut dies.
(Ers_A)
Sei $\phi(u, v, \vec{w}) \in -A-$Formel, $\vec{z} \in HS$, so dass

$$(HS, \in, A) \models \forall u, v, v' \ (\phi(u, v, \vec{z}) \wedge \phi(u, v', \vec{z}) \to v = v')$$

, d.h. ϕ ist in HS funktional. Setze dann für $x \in HS$:

$$y_0 = \{v \in HS \mid (HS, \in, A) \models \exists u \in x\phi(u, v, \vec{z})\}$$

Nach (Ers) in V ist $y_0 \in V$. Verfahre nun wie bei (Aus_A) bzw (Union).
(Found_A)
Sei ϕ eine $\in -A-$Formel, $\vec{y} \in HS$, $(HS, \in, A) \models \exists x\phi(x, \vec{y})$ und $x \in HS$ nach (Found) in V $\in$-minimal mit $(HS, \in, A) \models \phi(x, \vec{y})$. Dann :

$$(HS, \in, A) \models \forall u \ (u \in x \to \neg\phi(u, \vec{y}))$$

Das bedeutet aber gerade (Found_A).
(Inf)
Bette V in HS ein mittels $e(\emptyset) = E$, $e(x) = \{e(y) \mid y \in x\}$. Dann gilt für alle $x \in V$ $G_{e(x)} = G$ und $e(x) \in HS$:
Angenommen dies wäre falsch und x wäre ein $\in$-minimales Gegenbeispiel. Dann muss $x \neq \emptyset$, also $e(x) \neq \emptyset$ und damit $e(x) \subseteq W$ gelten. Ist nun $\pi \in G$, so folgt $\bar{\pi}(e(x)) = \{\bar{\pi}(e(y)) \mid y \in x\} = \{e(y) \mid x \in y\} = e(x)$ und damit die Symmetrie von $e(x)$. Da ferner x minimal gewählt war ist $e(x) \subseteq HS$ und damit $e(x) \in HS$, was einen Widerspruch darstellt.
Nun haben wir $e(0) = E$ und $e(n+1) = e(n) \cup \{e(n)\}$. Also erfüllt $e(\omega)$ die gewünschten Eigenschaften.

Wir haben jetzt gesehen, dass das Permutationsmodell für jegliche Wahl der Atome (solange sie den gleichen Rang haben) ein Modell von ZFA liefert. Was uns jedoch eigentlich interessiert, ist ein Modell von ZFA + $\neg AC$. Dazu müssen wir die zusätzliche Annahme machen, dass A **unendlich** ist. Dann verletzt W auf vielfältige Weise das Auswahlaxiom, z.B. hat die Menge der zweielementigen Teilmengen von A keine Auswahlfunktion und A ist unendlich, hat aber keine abzählbare Teilmenge. Diese Phänomene beruhen im Wesentlichen auf der Existenz einer nichttrivialen Permutation des Universums. Wir zeigen die erste hier genannte Verletzung der Auswahlsaxioms :

Satz:
Ist A unendlich, so hat $z = \{u \subseteq A \mid \text{card}(u) = 2\}$ keine Auswahlfunktion. Insbesondere gilt $(HS, \in, A) \models \neg AC$.
Beweis:
Zuerst müssen wir zeigen, dass z überhaupt zu HS gehört. Da für $u \in z$ $\{\pi \mid \pi|_u = \text{id}_u\} \subseteq G_u$ ist, und alle Atome erblich symmetrisch sind (vgl. die Bemerkung), ist u erblich symmetrisch nach Lemma 1. Damit ist $z \subseteq HS$. Ferner bildet $\bar{\pi}$ als Automorphismus zweielementige Teilmengen von A auf ebensolche ab, d.h. $\bar{\pi}(z) = z$, d.h. $G_z = G$ und die Symmetriebedingung ist trivial erfüllt. Nach Lemma 1 ist nun $z \in HS$.
Nun zur Verletzung des Auswahlaxioms :
Offenbar ist z in HS eine Menge nichtleerer Mengen. Angenommen es gäbe eine Auswahlfunktion $f \in HS$ für z. Wir wählen einen Träger A_0 von f. Da A nun **unendlich** ist, können wir $a \neq b \in A \setminus A_0$ wählen, sowie ein $\pi \in G$, das a und b vertauscht und sonst alle Atome festlässt. Insbesondere ist dann $\bar{\pi}(\{a, b\}) = \{a, b\}$. Nun gilt aber, da $\bar{\pi}$ Automorphismus ist :

$$(HS, \in, A) \models (a = f(\{a, b\})) \quad \leftrightarrow \quad (HS, \in, A) \models (\bar{\pi}(f)(\bar{\pi}(\{a, b\}))) = \bar{\pi}(a) \quad \leftrightarrow$$
$$(HS, \in, A) \models (b = f(\{a, b\}))$$

Demnach wäre aber $a = b$ in HS, entgegen unserer Voraussetzung, was die Existenz einer Auswahlfunktion widerlegt.