Seminar zur Mengenlehre - Forcing - SS 07

Erzwingen von GCH

Tim Fischbach (info@timfischbach.de)

7. Mai 2007

1 Einführung

Im Rahmen dieses Vortrags soll mittels Forcing ein Modell der verallgemeinerten Kontinuumshypothese konstruiert werden. Wir wiederholen zunächst deren Definition:

Definition 1. Die verallgemeinerte Kontinuumshypothese (Generalized Continuum Hypothesis) besteht in der Eigenschaft:

$$(\mathrm{GCH}) := \forall \alpha \; 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}.$$

Wir werden uns darauf beschränken, die Aussage auf beliebig großen Anfangsstücken der Ordinalzahlen zu erzwingen. Eine Verallgemeinerung für die Klasse aller Ordinalzahlen kann dann ähnlich wie im Vortrag zum Klassenforcing vorgenommen werden.

Zunächst wollen wir einige Aussagen über generische Erweiterungen zusammentragen, die in vorangegangenen Vorträgen bereits diskutiert wurden.

Sei M im Folgenden stets ein Grundmodell.

Lemma 1. *Sei κ eine reguläre Kardinalzahl, $(P, <)$ eine Forcing-Halbordnung und G ein P-generischer Filter über M.*

a) Wenn P κ-Antiketteneigenschaft hat, dann bewahrt P Kardinalitäten und Konfinalitäten $\geq \kappa$. Außerdem gilt

$$\forall \lambda \in Card^M \; card(\mathcal{P}(\lambda))^{M[G]} \leq ((card(P)^{<\kappa})^\lambda)^M.$$

b) Wenn P κ-abgeschlossen ist, dann bewahrt P Kardinalitäten und Konfinalitäten $\leq \kappa$. Außerdem besitzt κ in $M[G]$ keine neuen Teilmengen.

c) Wenn P $<\kappa$-abgeschlossen ist, dann bewahrt P Kardinalitäten und Konfinalitäten $\leq \kappa$.

Lemma 2. *Seien P, Q Forcing-Halbordnungen, $G \times H$ $P \times Q$-generisch über M. Wenn P λ-abgeschlossen ist und Q λ^+-Antiketteneigenschaft hat, dann gilt:*

$$\forall f \; ((f : \lambda \longrightarrow M \wedge f \in M[G \times H]) \rightarrow f \in M[H])$$

Außerdem benötigen wir

Lemma 3. $\forall \kappa \in Card$ *(κ regulär $\rightarrow$ (κ unerreichbar $\leftrightarrow \kappa = \beth_\kappa$)).*

2 Kardinalzahlkollaps

Wir führen folgende Schreibweise ein:

Definition 2. Definiere induktiv die funktionale Klasse Beth durch:

$$\beth_0 = \aleph_0, \qquad \beth_{\alpha+1} = 2^{\beth_\alpha},$$

$$\beth_\lambda = \bigcup\{\beth_\beta | \beta < \lambda\}, \text{für } lim(\lambda).$$

Bemerkung 1. Mit dieser Notation gilt (GCH) $\equiv \forall\alpha\ \beth_\alpha = \aleph_\alpha$.

Ziel unserer Überlegungen ist also die Konstruktion eines Modells, in dem kardinale Nachfolger ($\beth_\alpha^+$) mit $\beth$-Nachfolgern ($\beth_{\alpha+1}$) zusammenfallen. Die in diesem Abschnitt betrachtete generische Erweiterung soll dieser Anforderung zunächst für ein einzelnes $\alpha \in Ord$ entsprechen: Wir „kollabieren“ dazu die Kardinalzahl $\beth_{\alpha+1}$ auf $\beth_\alpha^+$, indem wir unserem Grundmodell eine Surjektion $\beth_\alpha^+ \longrightarrow \beth_{\alpha+1}$ hinzufügen. Abbildung 1 veranschaulicht die Situation.

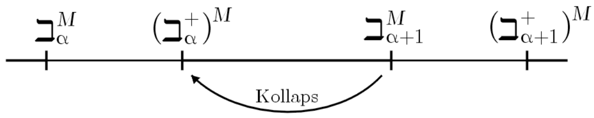

Abbildung 1: Kardinalzahlkollaps

Satz 1. *Sei $\alpha \in Ord$. Betrachte die Forcing-Halbordnung $P_\alpha := Fn(\beth_\alpha^+ \setminus \beth_\alpha, 2, \beth_\alpha^+)$. Sei G ein P_α-generischer Filter über M. Dann gilt:*

a) $\forall\kappa > \beth_{\alpha+1}^M\ (\kappa \in Card^M \leftrightarrow \kappa \in Card^{M[G]})$,

b) $\forall\kappa \leq (\beth_\alpha^+)^M\ (\kappa \in Card^M \leftrightarrow \kappa \in Card^{M[G]})$,

c) $\mathcal{P}(\beth_\alpha)^M = \mathcal{P}(\beth_\alpha)^{M[G]}$,

d) $\forall(\beth_\alpha^+)^M < \kappa \leq \beth_{\alpha+1}^M\ card^{M[G]}(\kappa) = (\beth_\alpha^+)^M$,

e) $M[G] \models 2^{\beth_\alpha} = \beth_\alpha^+$.

Beweis. zu a): Nach Lemma 1a) genügt: P_α hat die $(\beth_{\alpha+1}^+)^M$-Antiketteneigenschaft. $card(P_\alpha)$ kann durch das Produkt der Anzahl der Definitionsbereiche mit der Anzahl der Funktionen auf dem größtmöglichen Definitionsbereich abgeschätzt werden. Es ergibt sich:

$$card(P_\alpha) \leq (\sum_{\kappa < \beth_\alpha^+} 2^\kappa) \cdot 2^{\beth_\alpha} \leq (\beth_\alpha^+ \cdot 2^{\beth_\alpha}) \cdot 2^{\beth_\alpha} = 2^{\beth_\alpha} = \beth_{\alpha+1}.$$

Da keine Antikette in P_α größere Kardinalität haben kann als P_α selbst, besitzt P_α die $(\beth^+_{\alpha+1})^M$-Antiketteneigenschaft.

zu b): Nach Lemma 1c) genügt: P_α ist $<(\beth^+_\alpha)^M$-abgeschlossen. Sei $\lambda < (\beth^+_\alpha)^M$, $\langle p_\gamma \mid \gamma < \lambda\rangle$ eine absteigende Folge in P_α. Dann ist $p := \bigcup\{p_\gamma \mid \gamma < \lambda\}$ offenbar eine untere Schranke der Folge.

$$card(p) = card(\bigcup\{p_\gamma \mid \gamma < \lambda\}) \leq \sum_{\gamma<\lambda} card(p_\gamma) < \sum_{\gamma<\lambda} (\beth^+_\alpha)^M \leq \lambda \cdot (\beth^+_\alpha)^M = (\beth^+_\alpha)^M$$

Also $p \in P_\alpha$ und P_α ist $<(\beth^+_\alpha)^M$-abgeschlossen.

zu c): Gemäß Lemma 1b) hat $\beth^M_\alpha$ in $M[G]$ keine neuen Teilmengen, da P_α $<(\beth^+_\alpha)^M$-abgeschlossen und somit auch $\beth^M_\alpha$-abgeschlossen ist.

zu d): Wir zeigen, dass in $M[G]$ eine Surjektion von $(\beth^+_\alpha)^M$ auf $\mathcal{P}(\beth_\alpha)^M$ existiert. Betrachte $g := \bigcup G$. Aus Generizitätsgründen erhalten wir eine (totale) Funktion $g : (\beth^+_\alpha)^M \setminus \beth^M_\alpha \longrightarrow 2$. Definiere $f : (\beth^+_\alpha)^M \longrightarrow \mathcal{P}(\beth_\alpha)^M$ durch

$$f(\gamma) := \{\zeta < \beth^M_\alpha \mid g((\beth^M_\alpha \odot \gamma) \oplus \zeta) = 1\},$$

wobei $\odot$ und $\oplus$ die Ordinalzahloperationen sein sollen. Anschaulich unterteilen wir also den Definitionsbereich von g in Abschnitte der Größe $\beth^M_\alpha$ und definieren $f(\gamma)$ als die Teilmenge von $\beth^M_\alpha$, deren charakteristische Funktion mit der Einschränkung von g auf den γ-ten $\beth^M_\alpha$-Abschnitt übereinstimmt.

f ist surjektiv: Sei $a \in \mathcal{P}(\beth_\alpha)^M$. Definiere

$$D_a := \{p \in P_\alpha \mid \exists\gamma < (\beth^+_\alpha)^M\ \forall\zeta < \beth^M_\alpha\ (\zeta \in a \leftrightarrow p((\beth^M_\alpha \odot \gamma) \oplus \zeta) = 1)\}.$$

D_a enthält also genau solche Funktionen aus P_α, die auf einem $\beth^M_\alpha$-Abschnitt mit der charakteristischen Funktion von a übereinstimmen.

D_a ist dicht in P_α: Sei $p \in P_\alpha$. Also $card(p) < (\beth^+_\alpha)^M$. Aus Kardinalitätsgründen gibt es also einen $\beth^M_\alpha$-Abschnitt von $(\beth^+_\alpha)^M \setminus \beth^M_\alpha$ auf dem p nicht definiert ist, d.h. ein $\gamma_0 < (\beth^+_\alpha)^M$ mit $dom(p) \cap \{(\beth^M_\alpha \odot \gamma_0) \oplus \zeta \mid \zeta < \beth^M_\alpha\} = \emptyset$. Setze $q := p \cup \{((\beth^M_\alpha \odot \gamma_0) \oplus \zeta, 1) \mid \zeta \in a\}$. Dann gilt offenbar $card(q) < (\beth^+_\alpha)^M$, $q \in D_a$ und $q < p$. Also ist D_a dicht in P_α.

Gemäß Definition generischer Filter gilt daher $G \cap D_a \neq \emptyset$. Wähle $p \in G \cap D_a$. Dann gilt

$$\exists\gamma < (\beth^+_\alpha)^M\ \forall\zeta < \beth^M_\alpha\ (\zeta \in a \leftrightarrow p((\beth^M_\alpha \odot \gamma) \oplus \zeta) = 1)$$

und wegen $g = \bigcup G$ auch

$$\exists\gamma < (\beth^+_\alpha)^M\ \forall\zeta < \beth^M_\alpha\ (\zeta \in a \leftrightarrow g((\beth^M_\alpha \odot \gamma) \oplus \zeta) = 1).$$

Sei $\gamma_0 < (\beth^+_\alpha)^M$ ein Zeuge dieser Existenzaussage. Dann gilt, gemäß Definition von f, gerade $f(\gamma_0) = a$. Also ist f surjektiv.

zu e): Folgt aus d). $\square$

3 GCH für ein Anfangsstück der Ordinalzahlen

Im Folgenden sei stets $\theta \in Ord$, $lim(\theta)$. Wir definieren eine Forcing-Halbordnung:

$$\begin{aligned} P := \{p : dom(p) \longrightarrow 2 \mid dom(p) \subset \beth_\theta \wedge & \\ & \forall \alpha < \theta\ (card(dom(p) \cap \beth_\alpha^+) < \beth_\alpha^+) \wedge \\ & \forall \kappa\ ((\kappa \text{ unerreichbar} \vee \kappa = \omega) \rightarrow card(dom(p) \cap \kappa) < \kappa)\}. \end{aligned}$$

P sei partiell geordnet durch $\supset$: $p < q :\leftrightarrow p \supset q$.

Bemerkung 2. Die zweite Bedingung in der Definition von P impliziert:

$$\forall p \in P\ \forall \alpha < \theta\ (p \restriction (\beth_\alpha^+ \setminus \beth_\alpha) \in P_\alpha)$$

Lemma 4. *Sei G P-generisch über M. Dann gilt:*

a) $\forall \alpha < \theta\ (\beth_\alpha^+)^M \in Card^{M[G]}$,

b) $\forall \lambda \leq \theta\ lim(\lambda) \rightarrow \beth_\lambda^M \in Card^{M[G]}$.

Genauer gilt:

c) $\forall \alpha < \theta\ \aleph_{\alpha+1}^{M[G]} = (\beth_\alpha^+)^M$,

d) $\forall \lambda \leq \theta\ lim(\lambda) \rightarrow \aleph_\lambda^{M[G]} = \beth_\lambda^M$.

Beweis. Zu a): Wir unterscheiden drei Fälle:

- Sei $\alpha = \beta + 1 < \theta$. Definiere

$$\begin{aligned} P^{\leq\beta} &:= \{p \in P \mid dom(p) \subset \beth_\beta^+\}, \\ P^{>\beta} &:= \{p \in P \mid dom(p) \subset \beth_\theta \setminus \beth_\beta^+\}. \end{aligned} \tag{1}$$

Offenbar $P \cong P^{>\beta} \times P^{\leq\beta}$.

$P^{\leq\beta}$ hat $\beth_\alpha^+$-Antiketteneigenschaft: Wie oben erhalten wir:

$$card(P^{\leq\beta}) \leq (\sum_{\kappa < \beth_\beta^+} 2^\kappa) \cdot 2^{\beth_\beta} \leq (\beth_\beta^+ \cdot 2^{\beth_\beta}) \cdot 2^{\beth_\beta} = 2^{\beth_\beta} = \beth_{\beta+1} = \beth_\alpha,$$

wobei die erste Ungleichung $card(dom(p)) < \beth_\beta^+$ gemäß Definition von P benutzt.

$P^{>\beta}$ ist $<\beth_\alpha^+$-abgeschlossen: Sei $\lambda < \beth_\alpha^+$, $\langle p_\gamma \mid \gamma < \lambda \rangle$ eine absteigende Folge in $P^{>\beta}$. Dann ist $p := \bigcup\{p_\gamma \mid \gamma < \lambda\}$ eine untere Schranke der Folge. Es verbleibt noch $p \in P^{>\beta}$ zu verifizieren: Sei $\delta \geq \alpha$.

$$\begin{aligned}
&card(dom(p) \cap \beth_\delta^+) \\
&= card(dom(\bigcup\{p_\gamma \mid \gamma < \lambda\}) \cap \beth_\delta^+) \\
&\leq \sum_{\gamma<\lambda} card(dom(p_\gamma) \cap \beth_\delta^+) \\
&< \sum_{\gamma<\lambda} \beth_\delta^+ && \text{, da } p \in P \\
&\leq \lambda \cdot \beth_\delta^+ < \beth_\alpha^+ \cdot \beth_\delta^+ = \beth_\delta^+ && \text{, da } \delta \geq \alpha
\end{aligned}$$

Für $\delta < \alpha$, d.h. $\delta \leq \beta$, gilt $\forall \gamma < \lambda \; dom(p_\gamma) \cap \beth_\delta^+ = \emptyset$. Die Kardinalitätsbedingung für p ist also auch hier erfüllt. Die zweite Bedingung überprüft man analog.

Wir zeigen nun $(\beth_\alpha^+)^M \in Card^{M[G]}$: Angenommen dies gilt nicht, d.h. $card^{M[G]}((\beth_\alpha^+)^M) < (\beth_\alpha^+)^M$. Sei $G^{>\beta}$ $P^{>\beta}$-generisch über M, $G^{\leq\beta}$ $P^{\leq\beta}$-generisch über $M[G^{>\beta}]$, $G \cong G^{>\beta} \times G^{\leq\beta}$, $M[G] = M[G^{>\beta}][G^{\leq\beta}]$. Dann existiert $f : card^{M[G]}((\beth_\alpha^+)^M) \longleftrightarrow (\beth_\alpha^+)^M$ bijektiv, $f \in M[G]$. Da $P^{\leq\beta}$ die $(\beth_\alpha^+)^M$-Antiketteneigenschaft hat und $P^{>\beta}$ $<(\beth_\alpha^+)^M$-abgeschlossen ist, gilt gemäß Lemma 2 $f \in M[G^{\leq\beta}]$. Also $(\beth_\alpha^+)^M \notin Card^{M[G^{\leq\beta}]}$. Da $P^{\leq\beta}$ aber die $(\beth_\alpha^+)^M$-Antiketteneigenschaft besitzt, bleibt $(\beth_\alpha^+)^M$ als Kardinalzahl in $M[G^{\leq\beta}]$ erhalten. Widerspruch. Also $(\beth_\alpha^+)^M \in Card^{M[G]}$.

- Sei $\alpha < \theta$, α unerreichbar oder $\alpha = 0$. Definiere

  $$\begin{aligned} P^{<\alpha} &:= \{p \in P \mid dom(p) \subset \beth_\alpha\}, \\ P^{\geq\alpha} &:= \{p \in P \mid dom(p) \subset \beth_\theta \setminus \beth_\alpha\}. \end{aligned} \tag{2}$$

  $P \cong P^{\geq\alpha} \times P^{<\alpha}$.

  $P^{<\alpha}$ hat $\beth_\alpha^+$-Antiketteneigenschaft:

  $$card(P^{<\alpha}) \leq (\sum_{\kappa<\beth_\alpha} 2^\kappa) \cdot 2^{<\beth_\alpha} \leq (\beth_\alpha \cdot 2^{<\beth_\alpha}) \cdot 2^{<\beth_\alpha} = 2^{<\beth_\alpha} \leq \beth_\alpha,$$

  wobei die erste Ungleichung $card(dom(p)) < \beth_\alpha$ gemäß Definition von P benutzt.

  Wie oben sieht man: $P^{\geq\alpha}$ ist $<\beth_\alpha^+$-abgeschlossen.

  Mittels Lemma 2 folgt dann mit der gleichen Argumentation wie eben: $(\beth_\alpha^+)^M \in Card^{M[G]}$.

- Für alle übrigen $\alpha < \theta$ zeigen wir die Behauptung per Widerspruch: Ohne Einschränkung sei $lim(\alpha)$, $\alpha \neq 0$. Wir können außerdem annehmen, dass $\beth_\alpha^M$ singulär ist:

  Fall 1: α singulär. Dann existiert $\beta < \alpha$ und $f : \beta \longrightarrow \alpha$ konfinal. Da $lim(\alpha)$, ist $\left\langle \beth_\gamma^M | \gamma < \alpha \right\rangle$ konfinal in $\beth_\alpha^M$. Damit ist auch $\left\langle \beth_{f(\gamma)}^M | \gamma < \beta \right\rangle$ konfinal in $\beth_\alpha^M$. Also $cf(\beth_\alpha^M) \leq \beta < \alpha \leq \beth_\alpha^M$. Also $\beth_\alpha^M$ singulär.

Fall 2: α regulär. Da $lim(\alpha)$, ist $\langle \beth_\gamma | \gamma < \alpha \rangle$ konfinal in $\beth_\alpha$, folgt $cf(\beth_\alpha^M) \leq \alpha$. Da unerreichbare $\alpha < \theta$ bereits betrachtet wurden, können wir $\alpha < \beth_\alpha^M$ voraussetzen. Zusammen ergibt sich damit $cf(\beth_\alpha^M) < \beth_\alpha^M$, also ebenfalls die Singularität von $\beth_\alpha^M$.

Angenommen $\kappa := (\beth_\alpha^+)^M \notin Card^{M[G]}$. Da $cf(\kappa)^{M[G]} \in Card^{M[G]}$, folgt $cf(\kappa)^{M[G]} \leq \beth_\alpha^M$ gemäß Annahme. Aus der Regularität von Konfinalitäten können wir sogar $cf(\kappa)^{M[G]} < \beth_\alpha^M$ schließen, da $\beth_\alpha^M$ in M und damit auch in $M[G]$ singulär ist.

Da $lim(\alpha)$, können wir ein $\beta < \alpha$ mit $cf(\kappa)^{M[G]} < \beth_{\beta+1}^M$ wählen. Setzt $\lambda := (\beth_{\beta+1}^+)^M$. Seien $P^{>\beta} \times P^{\leq\beta} \cong P$ wie in (1), so dass $P^{\leq\beta}$ die λ-Antiketteneigenschaft besitzt und $P^{>\beta}$ $<\lambda$-abgeschlossen ist. Sei $G^{>\beta}$ $P^{>\beta}$-generisch über M, $G^{\leq\beta}$ $P^{\leq\beta}$-generisch über $M[G^{>\beta}]$, $G \cong G^{>\beta} \times G^{\leq\beta}$. Gemäß Lemma 1a) erhält $P^{\leq\beta}$ Konfinalitäten $\geq \lambda$. Also folgt aus $cf(\kappa)^{M[G]} = cf(\kappa)^{M[G^{>\beta}][G^{\leq\beta}]} < \lambda$ auch $cf(\kappa)^{M[G^{>\beta}]} < \lambda$. Da $P^{>\beta}$ $<\lambda$-abgeschlossen ist, existiert $f : cf(\kappa)^{M[G^{>\beta}]} \longrightarrow \kappa$, konfinal, gemäß Lemma 1 auch schon in M. Also $cf(\kappa)^M < \lambda$.

Andererseits folgt aus der Regularität von Nachfolgerkardinalzahlen: $cf(\kappa)^M = \kappa > \lambda$. Widerspruch. Also $\kappa \in Card^{M[G]}$.

Zu b): Für $\alpha = 0$ folgt die Aussage aus der Definitheit des Terms $\beth_0 = \aleph_0 = \omega$. Angenommen es gäbe $\alpha > 0$, $lim(\alpha)$ mit $\beth_\alpha^M = (\bigcup_{\beta<\alpha} \beth_\beta)^M \notin Card^{M[G]}$. Dann gäbe es bereits ein $(\beth_\beta^+)^M < \beth_\alpha^M$ mit $(\beth_\beta^+)^M \notin Card^{M[G]}$. Dies ist nach a) allerdings ausgeschlossen.

Zu c) und d): Man überzeugt sich leicht, dass $G_\alpha := \{p \upharpoonright (\beth_\alpha^+ \setminus \beth_\alpha) \mid p \in G\}$ P_α-generisch über M ist. Nach Satz 1 gilt daher

$$\forall (\beth_\alpha^+)^M < \kappa \leq \beth_{\alpha+1}^M \ \kappa \notin Card^{M[G]}.$$

□

Satz 2. *Sei G P-generisch über M. Dann gilt:*

$$M[G] \models \forall \alpha < \theta \ 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$$

Beweis. Wiederum unterscheiden wir drei Fälle:

- Sei $\alpha = \beta + 1 < \theta$. Seien $\lambda := \aleph_{\beta+1}^{M[G]} = (\beth_\beta^+)^M$, $\kappa := \aleph_{\beta+2}^{M[G]} = (\beth_{\beta+1}^+)^M$ gemäß Lemma 4c). Es genügt zu zeigen: $M[G] \models 2^\lambda \leq \kappa$. Sei dazu $\eta := \beth_{\beta+1}^M$, $P \cong P^{>\beta} \times P^{\leq\beta}$ wie in (1), so dass $card^M(P^{\leq\beta}) < \kappa$, $P^{\leq\beta}$ die κ-Antiketteneigenschaft besitzt und $P^{>\beta}$ $<\kappa$-abgeschlossen ist. Sei $G^{>\beta}$ $P^{>\beta}$-generisch über M, $G^{\leq\beta}$ $P^{\leq\beta}$-generisch über $M[G^{>\beta}]$, $G \cong G^{>\beta} \times G^{\leq\beta}$.

Da $P^{>\beta}$ $<\kappa$-abgeschlossen ist werden Kardinalitäten $\leq \kappa$ in $M[G^{>\beta}]$ erhalten.

$$\begin{aligned}
(2^\lambda)^{M[G]} &= (2^\lambda)^{M[G^{>\beta}][G^{\leq\beta}]} \\
&\leq ((card(P^{\leq\beta})^{<\kappa})^\lambda)^{M[G^{>\beta}]}, && \text{gemäß Lemma 1a)} \\
&= (card(P^{\leq\beta})^\eta)^{M[G^{>\beta}]}, && \text{da } (\kappa = \eta^+)^M \text{ und } \lambda < \eta \\
&= (2^\eta)^{M[G^{>\beta}]}, && \text{da } card^{M[G^{>\beta}]}(P^{\leq\beta}) \leq card^M(P^{\leq\beta}) \leq \eta \\
&= (2^\eta)^M, && \text{da } P^{>\beta} <\kappa\text{-abgeschlossen} \\
&= \beth^M_{\beta+2}
\end{aligned}$$

Da, gemäß Satz 1, $(\beth^+_{\beta+1})^M$ die größte Kardinalzahl $\leq \beth^M_{\beta+2}$ in $M[G]$ ist, folgt:

$$(2^\lambda)^{M[G]} \leq \beth^M_{\beta+1} = \aleph^{M[G]}_{\beta+2} = \kappa$$

- Sei $\alpha < \theta$, α unerreichbar oder $\alpha = 0$. Seien $\lambda := \aleph^{M[G]}_\alpha = \beth^M_\alpha$, $\kappa := \aleph^{M[G]}_{\alpha+1} = (\beth^+_\alpha)^M$, gemäß Lemma 4, $P \cong P^{\geq\alpha} \times P^{<\alpha}$, $G \cong G^{\geq\alpha} \times G^{<\alpha}$ wie in (2), so dass $card^M(P^{<\alpha}) < \kappa$, $P^{<\alpha}$ die κ-Antiketteneigenschaft besitzt und $P^{\geq\alpha}$ $<\kappa$-abgeschlossen ist.

$$\begin{aligned}
(2^\lambda)^{M[G]} &= (2^\lambda)^{M[G^{\geq\alpha}][G^{<\alpha}]} \\
&\leq ((card(P^{<\alpha})^{<\kappa})^\lambda)^{M[G^{>\alpha}]}, && \text{gemäß Lemma 1a)} \\
&= (card(P^{<\alpha})^\lambda)^{M[G^{\geq\alpha}]}, && \text{da } (\kappa = \lambda^+)^M \\
&= (2^\lambda)^{M[G^{\geq\alpha}]}, && \text{da } card^{M[G^{\geq\alpha}]}(P^{<\alpha}) \leq card^M(P^{<\alpha}) \leq \lambda \\
&= (2^\lambda)^M, && \text{da } P^{\geq\alpha} <\kappa\text{-abgeschlossen} \\
&= \beth^M_{\alpha+1}
\end{aligned}$$

Da, gemäß Satz 1, $(\beth^+_\alpha)^M$ die größte Kardinalzahl $\leq \beth^M_{\alpha+1}$ in $M[G]$ ist, folgt:

$$(2^\lambda)^{M[G]} \leq \beth^M_\alpha = \aleph^{M[G]}_{\alpha+1} = \kappa$$

- Für alle übrigen $\alpha < \theta$ kann - wie bereits im Beweis zu Lemma 4a) begründet wurde - ohne Einschränkung die Singularität von $\beth^M_\alpha$ angenommen werden. Man findet dann eine Zerlegung $P \cong P^{\geq} \times P^{<}$, so dass $card(P^<) < \eta$, $P^<$ die η-Antiketteneigenschaft besitzt und $P^{\geq}$ $<\eta$-abgeschlossen ist, wobei $\eta := cf(\beth^M_\alpha)^+$. Die Argumentation verläuft dann analog zum Beweis des vorherigen Falls.

□

Literatur

[1] *Set Theory, The Third Millenium Edition*, Thomas Jech (Springer, 2006)