## Satz (Easton):

Sei $M$ Grundmodell von ZFC+GCH, $E$ sog. Easton-Indexfunktion mit folgenden Eigenschaften:

1. $E : \mathcal{A} = \{\kappa \in \text{Card} \mid \kappa \text{ regulär}\} \longrightarrow \text{Card}$
2. $\forall \kappa, \lambda \in \mathcal{A}, \kappa < \lambda : E(\kappa) \leq E(\lambda)$
3. $\forall \kappa \in \mathcal{A} : \text{cof}(E(\kappa)) > \kappa$

Dann existiert eine generische Erweiterung $M[G]$ von $M$, so dass $\text{Card}^M = \text{Card}^{M[G]}$, alle Konfinalitäten erhalten werden und es gilt:

$$M[G] \models \forall \kappa \in \mathcal{A} : E(\kappa) = 2^\kappa.$$

## Anmerkungen:

- Das bedeutet, dass die Kontinuumsfunktion auf den regulären Kardinalzahlen in jeder Weise verlaufen kann, die mit dem Satz von König konsistent ist. Aus diesem folgt ja $\forall \kappa \in \text{Card} : \text{cof}(2^\kappa) > \kappa$, also unsere Bedingung 3. an $E$.
- Es wird die Existenz eines Grundmodells $M$, in dem die GCH gilt, vorausgesetzt. Im 5.Vortrag wurde gezeigt, dass sich die GCH durch Kardinalzahlkollaps erzwingen lässt. Alternativ kann man von $L^M$, $M$ ein ZFC-Grundmodell, ausgehen.
- Wir werden hier nur eine schwächere Form des Satzes von Easton beweisen, bei der in 1. $M \ni \mathcal{A} \subset \{\kappa \in \text{Card} \mid \kappa \text{ regulär}\}$ gilt. Der Beweis der stärkeren Form (4.Vortrag) geht im Prinzip analog, allerdings wird die verwendete Forcing-Halbordnung dann eine echte Klasse sein, was zusätzlichen Aufwand erfordert, insbesondere ist dann noch zu zeigen, dass $M[G] \models$ ZFC gilt.

Wir beweisen zunächst einige Lemmata zu Produkten $\lambda$-abgeschlossener Forcing-Halbordnungen:

## Lemma 3.1:

Sei P Forcing-Halbordnung. Dann ist P $\lambda$-abgeschlossen gdw. für jedes $\beta < \lambda^+$ jede monoton fallende Folge $\langle p_\alpha \mid \alpha < \beta \rangle$ in P eine untere Schranke hat.

## Beweis:

$\Leftarrow$: nichts zu zeigen.
$\Rightarrow$: Sei $\beta < \lambda^+$, $\langle p_\alpha \mid \alpha < \beta \rangle$ monoton fallende Folge in P.
Da reguläre Ordinalzahlen und insbesondere Konfinalitäten Kardinalzahlen sind, ist $\text{cof}(\beta) \leq \lambda$. Sei $f : \text{cof}(\beta) \to \beta$ konfinale Abbildung. Die Teilfolge $\langle p_{f(\xi)} \mid \xi < \text{cof}(\beta) \rangle$ hat dann eine untere Schranke $p$. Da $f[\text{cof}(\beta)]$ konfinal in $\beta$ ist, existiert zu beliebigem $\alpha < \beta$ $\xi < \text{cof}(\beta)$ mit $\alpha < f(\xi) < \beta$, also $p \leq p_{f(\xi)} \leq p_\alpha$, d.h. p ist untere Schranke von $\langle p_\alpha \mid \alpha < \beta \rangle$. $\sharp$

**Lemma 3.2:**

Sei M ZFC-Modell, $G \times H$ M-generisch über $P \times Q$, wobei $P$ $\lambda$-abgeschlossen sei und $Q$ die $\lambda^+$-Antiketteneigenschaft habe.

1. Sei $f : \lambda \to M \in M[G \times H]$. Dann ist $f \in M[H]$.
2. Es gilt $(2^\lambda)^{M[G \times H]} = (2^\lambda)^{M[H]}$.

**Beweis:**

Sei $\dot{f}^{G \times H} = f$. Es existiert $(p, q) \in G \times H$, so dass $\forall (p', q') \leq (p, q) : (p', q') \Vdash \dot{f} : \check{\lambda} \to \check{A}$ gilt. Wir wählen ein solches $(p, q)$ und betrachten im Weiteren $P \times Q$ unterhalb davon. Sei $\alpha < \lambda$. Definiere $D_\alpha \subseteq P$ wie folgt:

$$\begin{aligned} p \in D_\alpha \quad \Leftrightarrow \quad & \exists\, W \text{maximale Antikette in } Q : \exists \{\chi_{\alpha,p,q} \mid q \in W\} : \\ & \forall q \in W : (p, q) \Vdash \dot{f}(\alpha) = \chi_{\alpha,p,q}. \end{aligned} \tag{1}$$

Behauptung: $D_\alpha$ ist offene dichte Menge in P.
Beweis: Sei $p \in D_\alpha$, $W_p$ die entsprechende Antikette. Sei $\tilde{p} \leq p$. Es gilt dann $(\tilde{p}, q) \leq (p, q)$ und damit $(\tilde{p}, q) \Vdash \dot{f}(\alpha) = \chi_{\alpha,p,q}$, also erfüllt $\tilde{p}$ mit $W_p$ und $\{\chi_{\alpha,p,q} \mid q \in W_p\}$ die Bedingung (1). $D_\alpha$ ist also offen.
Sei nun $p_0 \in P$. Wir wählen $q_0 \in Q$ und $\chi_0 \in A$ derart, dass $(p_0, q_0) \Vdash \dot{f}(\alpha) = \chi_0$ gilt, sowie im Weiteren induktiv $p_\gamma \in P$, $q_\gamma \in Q$ und $\chi_\gamma \in A$ derart, dass $\forall \beta < \gamma\, p_\beta \geq p_\gamma$, $q_\beta \perp q_\gamma$ sowie $\forall \gamma : (p_\gamma, q_\gamma) \Vdash \dot{f}(\alpha) = \chi_\gamma$ gilt.
Das geht, solange die Antikette $\{q_\beta \mid \beta < \gamma\}$ nicht maximal ist: Da $Q$ die $\lambda^+$-c.c. hat, ist dann $\gamma < \lambda^+$ und aufgrund der $\lambda$-Abgeschlossenheit von $P$ sowie Lemma 3.1 existiert ein $\tilde{p_\gamma}$ mit $\forall \beta \leq \gamma\ p_\beta \geq \tilde{p_\gamma}$. Wir können dann aufgrund des Forcing-Theorems ein $(p_\gamma, q_\gamma) \leq (\tilde{p_\gamma}, \tilde{q_\gamma})$ finden, das $f(\alpha)$ festlegt.
Es existiert ein $\xi < \lambda^+$, so dass $W_\alpha = \{q_\gamma \mid \gamma < \xi\}$ maximale Antikette ist sowie $p \in P$ mit $p \leq p_\gamma\ \forall \gamma < \xi$. $p$ erfüllt dann mit $W_\alpha$ und $\{\chi_\gamma \mid \gamma < \xi\}$ die Bedingung 1. Damit ist $D_\alpha$ dicht.

Da $P$ $\lambda$-abgeschlossen ist, ist es $\lambda$-distibutiv und $D = \bigcap \{D_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$ offene dichte Menge. Wähle $p \in G \cap D$ sowie für $\alpha < \lambda$ eine maximale Antikette $W_\alpha$ und eine Familie $\{\chi_{\alpha,p,q} \mid q \in W_\alpha\}$ gemäß der Definition in 1.

Da $H$ $M$-generisch ist, gibt es für beliebiges $\alpha$ genau ein $q_\alpha \in H \cap W_\alpha$. Es gilt dann:

$$M[G \times H] \models f(\alpha) = \chi_{\alpha,p,q_\alpha},$$

wodurch $f$ in $M[H]$ definiert wird. $\sharp$

## Beweis des Satzes von Easton:

Wir gehen wie folgt vor:

1. Konstruktion einer Forcing-Halbordnung $P$ zu gegebenem $E$,
2. Herleitung ihrer kombinatorischen Eigenschaften, insbesondere der Voraussetzung von Lemma 3.1
3. Wahl eines $M$-generischen $G$, das zu jedem $\kappa \in \mathcal{A}$ $E(\kappa)$ Teilmengen von $\kappa$ an $M$ adjungiert
4. Unter Verwendung von Lemma 3.1 wird dann gezeigt, dass P Kardinalzahlen und Konfinalitäten erhält und dass
5. $(2^\kappa)^{M[G]} = (E(\kappa))^{M[G]}$ gilt.

## 1.

Sei $P_\kappa$ die bekannte, $E(\kappa)$ Teilmengen von $\kappa$ adjungierende, Forcing-Halbordnung, d.h.

$$P_\kappa = \{p_\kappa : E(\kappa) \times \kappa \to 2 \mid \overline{\overline{p_\kappa}} < \kappa\} \tag{2}$$

mit $p_\kappa \leq q_\kappa \Leftrightarrow p_\kappa \supseteq q_\kappa$ und $1_{P_\kappa} = \emptyset$.
Sei dann $P$ das sogenannte Easton-Produkt von $\{P_\kappa \mid \kappa \in \mathcal{A}\}$, d.h.

$$P = \{p \in \prod_{\kappa \in \mathcal{A}} P_\kappa \mid \forall \gamma \in \mathcal{A} : \overline{\overline{s(p) \cap \gamma}} < \gamma\} \tag{3}$$

mit $p \leq q \Leftrightarrow \forall \kappa \in \mathcal{A} : p_\kappa \leq q_\kappa$ und $1_p = \langle \emptyset \mid \kappa \in \mathcal{A} \rangle$.
Man kann P auch als Menge der Funktionen $p$ mit $\mathrm{rng}(p) \subseteq 2$ definieren, deren Definitionsbereich aus Tripeln $(\kappa, \alpha, \nu)$ mit $\kappa \in \mathcal{A}, \alpha < E(\kappa), \nu < \kappa$ besteht und für die gilt:

$$\forall \gamma \in \mathcal{A}\ \overline{\overline{\{(\kappa, \alpha, \nu) \in \mathrm{dom}(p) \mid \kappa \leq \gamma\}}} < \gamma, \tag{4}$$

wobei dann gelte $p \leq q \Leftrightarrow p \supseteq q$ und $1_p = \emptyset$. Die beiden Definitionen sind auf kanonische Weise isomorph:
Setze von der zweiten Definition ausgehend $p_\kappa(\alpha, \nu) = p(\kappa, \alpha, \nu)$. Die Bedingungen (2)+(3) und (4) lassen sich dann folgendermaßen ineinander übersetzen:
(4)⇒(2): $\overline{\overline{\mathrm{dom}(p_\kappa)}} = \overline{\overline{\{(\kappa, \alpha, \nu) \in \mathrm{dom}(p)}} \leq \overline{\overline{\{(\lambda, \alpha, \nu) \in \mathrm{dom}(p) \mid \lambda \leq \kappa\}}} < \kappa$.
(4)⇒(3): da eine $\lambda$-elementige Menge ($\{(\kappa, \alpha, \nu) \in \mathrm{dom}(p) \mid \kappa \leq \gamma\}$) nicht die disjunkte Vereinigung von mehr als $\lambda$ vielen nicht leeren Mengen (die zu $s(p)$ gehörenden $\mathrm{dom}(p_\kappa)$) sein kann.
(2),(3)⇒(4): Sei $\gamma \in \mathcal{A}, \overline{\overline{s(p) \cap \gamma}} = \mu < \gamma$. Dann gilt mit dem Satz von König:

$$\overline{\overline{\{(\kappa, \alpha, \nu) \in \mathrm{dom}(p) \mid \kappa < \gamma\}}} = \sum_{\kappa \in s(p) \cap \gamma} \overline{\overline{\{(\kappa, \alpha, \nu) \in \mathrm{dom}(p)\}}} < \prod_{\kappa \in s(p) \cap \gamma} \kappa \leq \gamma^\mu = \gamma.$$

Der Summand mit $\kappa = \gamma$ ist auch kleiner als $\gamma$, die gesamte Summe damit auch.

## 2.

Sei $\lambda$ regulär, die Zerlegung $p = p_{\leq\lambda} \cup p_{>\lambda}$ folgendermaßen definiert:

$$p_{\leq\lambda} = p\,|_{\{(\kappa,\alpha,\nu)|\kappa\leq\lambda\}}, \qquad p_{>\lambda} = p\,|_{\{(\kappa,\alpha,\nu)|\kappa>\lambda\}}\ . \tag{5}$$

Dann ist $P \cong P_{\leq\lambda} \times P_{>\lambda} \cong P_{>\lambda} \times P_{\leq\lambda}$ mit

$$P_{\leq\lambda} = \{p_{\leq\lambda} \mid p \in P\}, \qquad P_{>\lambda} = \{p_{>\lambda} \mid p \in P\}. \tag{6}$$

$P_{\leq\lambda}$ und $P_{>\lambda}$ sind dann die Easton-Produkte von $\{P_\kappa \mid \kappa \leq \lambda\}$ bzw. $\{P_\kappa \mid \kappa > \lambda\}$ und selbst (mit passender Definition von $\leq_{P_{\leq\lambda}}$ und $\leq_{P_{>\lambda}}$) Forcing-Halbordnungen.
Im Weiteren seien $G_{\leq\lambda}$ und $G_{>\lambda}$ analog definiert.

Da $\lambda$ regulär ist, die GCH gilt (daraus folgt $2^{<\lambda} = \lambda$) und wegen Gleichung (4) $\forall p \in P : \overline{\overline{p_{\leq\lambda}}} < \lambda$ gilt, hat $P_{\leq\lambda}$ nach Satz 15.4 (siehe Vortrag 1) die $\lambda^+$-Antiketteneigenschaft.

### Abgeschlossenheit von $P_{>\lambda}$

Sei $\langle p_\alpha \mid \alpha < \beta \leq \lambda\rangle$ bzgl. $\leq_{P_{>\lambda}}$ monoton fallende Folge in $P_{>\lambda}$.
$p = \bigcup\langle p_\alpha \mid \alpha < \kappa \leq \lambda\rangle$ ist dann untere Schranke und erfüllt (4) für alle $\gamma \leq \lambda$ (da die entsprechende Menge dann leer ist). Wenn $\gamma > \lambda$ ist, kann $\overline{\overline{p_{\leq\gamma}}}$ jedenfalls nicht größer werden als $\gamma$, da Vereinigung über eine $\beta \leq \lambda < \gamma$-elementige Menge, deren Elemente alle Kardinalität $< \gamma$ haben. Ist sie gleich, ist $f : \beta \to \gamma, f(\alpha) = \overline{\overline{(p_\alpha)_{\leq\gamma}}}$ eine konfinale Abbildung von $\beta$ nach $\gamma$, d.h. $\gamma$ ist singulär. Damit gilt (4) für alle regulären $\gamma$.
Also $p \in P \Rightarrow p \in P_{>\lambda}$, $P_{>\lambda}$ ist damit $\lambda$-abgeschlossen.
Damit gilt Lemma 3.1 für die Forcing-Halbordnung $P_{>\lambda} \times P_{\leq\lambda}$.

## 3.

Wir können nun $G$ generisch über $P$ wählen.
Die Projektion $G_\kappa = \{p_\kappa \mid p \in G\}$ von $G$ auf $P_\kappa$ ist dann generisch über $P_\kappa$, da $G$ das Easton-Produkt von $\{G_\kappa \mid \kappa \in \mathcal{A}\}$ ist und $p \in G \cap D$ ($D$ dicht in $P$) $p_\kappa \in G_\kappa \cap D_\kappa$ impliziert ($D_\kappa$ sei hier die Projektion von $D$ auf $P_\kappa$).
Da nun $f_\kappa = \bigcup G_\kappa \in M[G]$ $E(\kappa)$ Teilmengen von $\kappa$ (verallgemeinerte *Cohen-Reals*) adjungiert, tut $f = \bigcup G = \bigcup\{\bigcup G_\kappa \mid \kappa \in \mathcal{A}\} \in M[G]$ (nach der Definition in Gleichung (4)) für alle $\kappa \in \mathcal{A}$ $E(\kappa)$ neue Teilmengen von $\kappa$ definiert. $f_\kappa$ ist ja die Projektion von $f$ auf $P_\kappa$.

## 4.

Wir wollen hier zeigen, dass Kardinalzahlen und Konfinalitäten von $P$ erhalten werden. Wie wir aus dem Vortrag zur Erzwingung von $2^\kappa = \lambda$ wissen, genügt es zu zeigen, dass reguläre Ordinalzahlen in $M$ reguläre Ordinalzahlen in $M[G]$ bleiben.
Sei $\kappa$ regulär in $M$. Angenommen, $\kappa$ wäre singulär in $M[G]$. Dann gäbe es $\lambda < \kappa$ und eine konfinale Abbildung $f : \lambda \to \kappa$ in $M[G]$.
Wir wissen aus dem Produktlemma: $M[G] = M[G_{>\lambda}][G_{\leq\lambda}]$
und aus Lemma 3.1: $f \in M[G_{\leq\lambda}]$, also ist $\kappa$ in $M[G_{\leq\lambda}]$ singulär.
Da $P_{\leq\lambda}$ die $\lambda^+$-c.c. hat, ist $\kappa$ nach Lemma 15.3 aber singulär in $M$. Das ist ein Widerspruch, also muss $\kappa$ in $M[G]$ regulär geblieben sein.

## 5.

Wir wissen nun, dass $\forall\kappa \in \mathcal{A} : (2^\kappa)^{M[G]} \geq E(\kappa)$ gilt.
Außerdem wissen wir aus dem Vortrag zur Konsistenz von $M[G_\kappa] \models 2^\kappa = E(\kappa)$ gilt), dass $\overline{\overline{P_\kappa}} = E(\kappa)$ gilt. Damit gilt für das Easton-Produkt $P_{\leq\lambda}$:

$$\overline{\overline{P_{\leq\lambda}}} \leq \prod_{\mathcal{A}\cap\lambda^+} \overline{\overline{P_\kappa}} = \prod_{\mathcal{A}\cap\lambda^+} E(\kappa) \leq \prod_{\mathcal{A}\cap\lambda^+} E(\lambda) \leq E(\lambda)^\lambda = E(\lambda)$$

(wobei der drittletzte Schritt Bedingung 2. an $E$ benutzt, der letzte Bedingung 3. sowie die GCH).
Da $P_{\leq\lambda}$ für reguläre $\lambda$ (für singuläre $\lambda$ geht das Folgende nicht, weswegen $\mathcal{A}$ nur reguläre $\lambda$ enthalten darf) die $\lambda^+$-c.c. hat, gibt es maximal $\overline{\overline{P_{\leq\lambda}}}^\lambda = E(\lambda)^\lambda = E(\lambda)$ Antiketten in P. Analog zum Beweis von $M[G_\lambda] \models 2^\lambda \leq E(\lambda)$ folgt daraus, dass es höchstens $E(\lambda)$ *nice names* für Teilmengen von $\check{\lambda}$ in M gibt. Daraus folgt genauso wie im 1. Vortrag, dass $2^\lambda \leq E(\lambda)$ in $M[G_{\leq\lambda}]$ gilt.
Aus Lemma 3.1 folgt dann $(2^\lambda)^{M[G]} = (2^\lambda)^{M[G_{\leq\lambda}]} \leq E(\lambda)$, also die Behauptung. ♯