(b) $A \in V \longleftrightarrow \exists \alpha\, A \subseteq V_\alpha$.
Mit anderen Worten: Echte Klassen reichen „bis an den oberen Rand" des Mengenuniversums V heran, ihre ordinale Höhe ist nicht beschränkt, wohingegen jede Menge schon Teil eines Anfangsstücks von V ist, siehe Abbildung 3.

BEWEIS. Da V von den V_α aufsteigend ausgeschöpft wird, folgt (a) leicht aus (b). Ist nun $A \in V$, so ist $A \in V_\alpha$ für ein $\alpha \in \mathrm{On}$. Wegen der Transitivität von V_α folgt $A \subseteq V_\alpha$. Ist umgekehrt $A \subseteq V_\alpha$, so ist $A \in V$ wegen **(Aus)**. QED

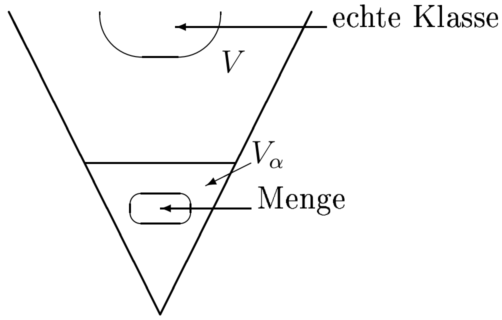


Abbildung 3: Mengen und echte Klassen

6 Äquivalenzen des Auswahlaxioms.

Das Auswahlaxiom ist zu zahlreichen anderen „Auswahlprinzipien" äquivalent. Wir zeigen einige dieser Äquivalenzen.

Satz 6.1 *Unter* **ZF** *sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) **(AC)**.

(ii) *Jede Äquivalenzrelation auf einer Menge hat ein vollständiges Repräsentantensystem.*

(iii) *Jedes Produkt nicht-leerer Mengen ist nicht leer.*

(iv) *Zu jeder Menge gibt es eine* **Auswahlfunktion**, *die aus jedem nicht-leeren Element dieser Menge ein Element auswählt:* $\forall a \, \exists f \; (f : a \to V \;\wedge\; \forall u\, ((u \in a \,\wedge\, u \neq \emptyset) \longrightarrow f(u) \in u))$.

(v) **Wohlordnungssatz von Zermelo.** *Jede Menge läßt sich wohlordnen:* $\forall a \, \exists r \;\; \mathrm{WO}(a, r)$.

(vi) *Jede Menge ist zu einer Ordinalzahl gleichmächtig:* $\forall a \, \exists f \, \exists \alpha \; f : \alpha \xrightarrow{bij.} a$.

(vii) **Lemma von Zorn.**[4] *Jede induktiv geordnete Menge hat ein maximales Element:*

[4] MAX AUGUST ZORN (geb. 6.6.1906, Hamburg) 1930 Promotion an der Hansischen Universität Hamburg; 1933 Emigration in die USA; dort Professor für Mathematik zunächst an der Yale University in

$$\forall a \forall r\,((\mathrm{PO}(a,r) \wedge \forall b \exists c((b \subseteq a \wedge b \textit{ ist } r\textit{-Kette}) \to c \textit{ ist obere Schranke von } b)) \\ \longrightarrow \exists c\,(c \in a \wedge c \textit{ ist } r\textit{-maximal})).$$

BEWEIS. Zur Äquivalenz von (i), (ii) und (iii) siehe 3.34.

„(iii)⇒(iv)". Sei $a \in V$. Wir können o.E. annehmen, daß $\emptyset \notin a$ gilt. Definiere $g\colon a \to V$ durch $g(u) :\equiv u$ für $u \in a$. Nach (iii) ist $\mathsf{X}_{u\in x}\, g(u) \neq \emptyset$. Jedes $f \in \mathsf{X}_{u \in x}\, g(u)$ ist von der Art, wie für (iv) benötigt.

„(iv)⇒(i)". Sei a eine Menge nicht-leerer, disjunkter Mengen. Nach (iv) existiert $f\colon a \to V$ mit $f(u) \in u$ für alle $u \in a$. Da die Elemente von a disjunkt sind, ist $\mathrm{ran}(f)$ eine Menge, die jedes Element von a in genau einem Punkt trifft.

„(iv)⇒(vi)". Sei $a \in V$ beliebig. Idee: Wir wählen Elemente

$$F(0) \in a, \quad F(1) \in a\backslash\{F(0)\}, \quad F(2) \in a\backslash\{F(0), F(1)\}, \; \dots\;, \quad F(\alpha) \in a\backslash\{F(\beta) \,|\, \beta < \alpha\}, \dots$$

solange, bis wir a ganz ausgeschöpft haben, und wählen für α den Zeitpunkt, an dem der Prozeß abbricht, d.h., für den $a = \{F(\beta) \,|\, \beta < \alpha\}$ gilt. Formal gehen wir so vor: Nach (iv) existiert eine Auswahlfunktion g für $\mathcal{P}(a)$, also $g\colon \mathcal{P}(a) \to V$ mit $g(u) \in u$ für $\emptyset \neq u \subseteq a$. Wir können o.E. $g(\emptyset) = a$ annehmen. Definiere rekursiv ein $F\colon \mathrm{On} \to a \cup \{a\}$ mit $F(\alpha) = g(a \setminus \{F(\beta) \,|\, \beta < \alpha\})$.

(1) $\quad \exists \alpha\, F(\alpha) = a.$

BEWEIS. Angenommen, es gilt $F(\alpha) \neq a$ für alle $\alpha \in \mathrm{On}$. Dann gilt $F(\alpha) \in a\backslash\{F(\beta) \,|\, \beta < \alpha\}$ für alle α nach Definition von g, d.h., $F\colon \mathrm{On} \xrightarrow{inj.} a$. Wegen $\mathrm{ran}(F) \subseteq a$ ist $\mathrm{ran}(F) \in V$ nach **(Aus)**, und es gilt $F^{-1}\colon \mathrm{ran}(F) \xrightarrow{surj.} \mathrm{On}$. Aus letzterem folgt $\mathrm{On} \in V$ wegen **(Ers)**. Da $\mathrm{On} \notin V$ gilt, ergibt sich ein Widerspruch. qed(1)

Sei α minimal mit $F(\alpha) = a$.[5] Dann ist $F \restriction \alpha$ eine Funktion $f\colon \alpha \to a$. Diese ist bijektiv: Wegen $F(\alpha) = a$ ist

$$a \setminus \underbrace{\{F(\beta) \,|\, \beta < \alpha\}}_{=\mathrm{ran}(f)} = \emptyset,$$

also $a = \mathrm{ran}(f)$, d.h., f ist surjektiv; für $\gamma < \beta < \alpha$ ist $F(\beta) \in a \setminus \{F(\delta) \,|\, \delta < \beta\}$, also speziell $f(\beta) = F(\beta) \neq F(\gamma) = f(\gamma)$, d.h., f ist injektiv.

„(vi)⇒(v)". Sei $\alpha \in \mathrm{On}$ und $f \in V$ mit $f\colon a \xrightarrow{bij.} \alpha$. Dann ist $\{(x,y) \mid x \in a \wedge y \in a \wedge f(x) < f(y)\}$ eine Wohlordnung r auf a.

„(v)⇒(iv)". Sei $a \in V$. Sei r eine Wohlordnung auf $\bigcup a$. Wir definieren f derart, daß f aus jedem $u \in a$ das r-kleinste Element auswählt. Formal gehen wir dabei so vor: Da r eine Wohlordnung von $\bigcup a$ ist, ist durch

$$F :\equiv \{(u,y) \mid u \in a \wedge y \in u \wedge \forall x\,((x \in u \wedge x \neq y) \to yrx)\} \cup \{(u,\emptyset) \mid u \in a \wedge u = \emptyset\}$$

New Haven (Conn.), dann an der Indiana University in Bloomington. ZORN veröffentlicht neben Arbeiten zur Algebra und Mengenlehre auch solche zur Analysis und Funktionalanalysis. Das nach ihm benannte Lemma wurde übrigens erstmals von KURATOWSKI formuliert und bewiesen und erst zwanzig Jahre später von ZORN wiederentdeckt.

[5] also $\alpha :\equiv \bigcap\{\beta \,|\, F(\beta) = a\}$: Zur Wahl von α wird **(AC)** *nicht* benötigt.

eine funktionale Klasse $F\colon a \to V$ definiert.[6] Für $u \in a$ mit $u \neq \emptyset$ gilt $F(u) \in u$. Wegen $\mathrm{dom}(F) \in V$ ist $F \in V$ nach 3.30, also eine Funktion wie für (iv) benötigt.

„(iv)⇒(vii)“. Die Menge a sei durch r induktiv geordnet.[7] Wir wollen eine r-Kette b konstruieren, die alle ihre oberen Schranken als Elemente enthält. Ist dann $c \in a$ irgendeine obere Schranke von b (wegen der Induktivität der Ordnung existiert ein solches c), so ist c r-maximales Element von a: ist nämlich $x \in a$ und crx, so ist x eine obere Schranke von b und nach Wahl von b gilt $x \in b$. Weil c obere Schranke von b ist, ergibt sich xrc. Insgesamt haben wir crx und xrc, was wegen der Antisymmetrie von r auf $c = x$ führt. Also ist c in der Tat r-maximal in a. Zu einer r-Kette der gewünschten Art kommen wir, indem wir mit der r-Kette $\emptyset$ starten und dann in jedem Schritt der Konstruktion zu der bereits konstruierten Kette eine ihrer oberen r-Schranken hinzunehmen solange, bis dieser Prozeß terminiert, d.h., zu keiner echten Erweiterung mehr führt. Formal gehen wir so vor: Nach (iv) existiert eine Auswahlfunktion g für $\mathcal{P}(a)$, also $g\colon \mathcal{P}(a) \to a \cup \{a\}$ mit $g(u) \in u$, falls $\emptyset \neq u \subseteq a$, und (o.E.) $g(\emptyset) = a$. Definiere rekursiv eine Funktion $F : \mathrm{On} \to a \cup \{a\}$ mit

$$F(\alpha) = g\Big(\{z \mid z \in a \setminus \{F(\beta) \mid \beta < \alpha\} \wedge z \text{ ist obere } r\text{-Schranke von } \{F(\beta) \mid \beta < \alpha\}\}\Big).$$

Dieselben Argumente, die zu (1) führen, zeigen, daß es $\alpha \in \mathrm{On}$ gibt mit $F(\alpha) = a$. Wähle α minimal mit $F(\alpha) = a$. (Im Beweis von (vi) haben wir gesehen, daß dies ohne **(AC)** möglich ist.) Dann ist $\{F(\beta) \mid \beta < \alpha\}$ eine r-Kette b: Ist nämlich $\gamma < \beta < \alpha$, so ist nach Konstruktion $F(\beta)$ eine obere r-Schranke von $\{F(\delta) \mid \delta < \beta\}$, speziell also $F(\gamma) r F(\beta)$. Aus $F(\alpha) = a$ folgt

$$\{z | z \in a \setminus \{F(\beta) \mid \beta < \alpha\} \wedge z \text{ ist obere } r\text{-Schranke von } \{F(\beta) \mid \beta < \alpha\}\} = \emptyset$$

und dies impliziert, daß b alle seine oberen r-Schranken als Element enthält. Also ist b wie benötigt.

„(vii)⇒(iv)“.[8] Sei $x \in V$. Sei

$$\begin{aligned} A :\equiv \{g \mid\ & g\colon \mathrm{dom}(g) \to V \wedge \mathrm{dom}(g) \subseteq x \\ & \wedge \forall u (u \in \mathrm{dom}(g) \to ((u \neq \emptyset \to g(u) \in u) \wedge (u = \emptyset \to g(u) = \emptyset)))\}. \end{aligned}$$

Dann ist $A \subseteq \mathcal{P}(x \times (\{\emptyset\} \cup \bigcup x))$, also $A \in V$. Die Menge A wird durch $\subseteq$ induktiv geordnet: Ist $b \subseteq A$ eine $\subseteq$-Kette, so ist $\bigcup b \in A$ und eine obere $\subseteq$-Schranke von b. Nach Zorn existiert somit ein $\subseteq$-maximales $f \in A$. Dann ist $f\colon \mathrm{dom}(f) \to V$ mit $f(u) \in u$ für alle $u \in \mathrm{dom}(f)$ mit $u \neq \emptyset$, und es gilt $\mathrm{dom}(f) \subseteq x$. Es bleibt $\mathrm{dom}(f) = x$ zu zeigen. Wäre $x \neq \mathrm{dom}(f)$, so gäbe es $u \in x \setminus \mathrm{dom}(f)$. Ist $u = \emptyset$ so ist $f' :\equiv f \cup \{(u, \emptyset)\}$ in A und eine echte Erweiterung von f; ist $u \neq \emptyset$, so ist $\emptyset \neq \{f \cup \{(u, y)\} \mid y \in u\} \subseteq A$ und jedes $f' \in \{f \cup \{(u, y)\} \mid y \in u\}$ ist eine echte Erweiterung von f in A. Dies widerspricht der $\subseteq$-Maximalität von f. Also gilt $x = \mathrm{dom}(f)$.

Damit ist der Satz vollständig bewiesen. QED

[6] Im Fall $u \in a$ und $u \neq \emptyset$ ist $F(u)$ das r-kleinste Element von u.

[7] vgl. 3.16

[8] Der folgende Beweis ist typisch für den Nachweis von Existenzaussagen m.H. des Lemmas von Zorn.

Bemerkung 6.2 Punkt (vi) des Satzes erlaubt es uns, jede Menge a mit Hilfe von Ordinalzahlen zu „zählen“. Dies ist der Grundstein für die Theorie der Kardinalzahlen, die wir im übernächsten Kapitel entwickeln werden. Einen ersten korrekten Beweis des Wohlordnungssatzes gab ZERMELO im Jahre 1904.

7 Kardinalzahlen.

7.1 Größenvergleiche bei Mengen.

Wann haben zwei Mengen x und y gleich viele Elemente? Eine vernünftige, erstmals von CANTOR (1878)[9] gegebene Antwort auf diese Frage ist: Die Mengen x und y haben gleich viele Elemente, wenn man den Elementen von x *umkehrbar eindeutig* die Elemente von y zuordnen kann. Eine Menge x hat „höchstens soviele Elemente“ wie eine Menge y, wenn man jedem Element von x ein Element von y derart zuordnen kann, daß je zwei verschiedenen Elementen von x auch verschiedene Elemente von y zugewiesen werden. Wir definieren deshalb:

Definition 7.1 Wir definieren:
(a) x und y sind **gleichmächtig** $:\equiv x \sim y :\equiv \exists f\, f\colon x \xrightarrow{bij.} y$.
(b) x **hat höchstens die Mächtigkeit von** $y :\equiv x \preceq y :\equiv \exists f\, f\colon x \xrightarrow{inj.} y$.

Man zeigt leicht die folgenden Eigenschaften von $\sim$ und $\preceq$:

Lemma 7.2 *Unter* **ZF** *gelten die folgenden Aussagen:*
(a) $\sim$ *ist eine Äquivalenzrelation auf* V.
(b) $\forall x, y\, (x \sim y \to (x \preceq y \wedge y \preceq x))$.
(c) $\preceq$ *ist reflexiv:* $\forall x\, x \preceq x$.
(d) $\preceq$ *ist transitiv:* $\forall x, y, z\, ((x \preceq y \wedge y \preceq z) \to x \preceq z)$.
(e) $\forall x, y\, (x \subseteq y \to x \preceq y)$.

Wir erwarten intuitiv, daß auch die Umkehrung von (b) gilt. CANTOR äußert eine dementsprechende Vermutung, FELIX BERNSTEIN[10] (noch Gymnasiast zu dieser Zeit) trägt 1897

[9] siehe [?], p.119

[10] FELIX BERNSTEIN (24.2.1878, Halle–3.12.1956, Zürich) ab 1896 Studium der Philosophie, Archäologie und Kunstgeschichte in Pisa und Rom sowie der Mathematik in München, Halle, Berlin und Göttingen; 1901 Promotion in Göttingen bei HILBERT und FELIX KLEIN; 1903 Habilitation in Halle; 1903–1907 Privatdozent; 1907 Leiter der mathematischen Klasse des ersten deutschen Seminars für Versicherungsmathematik in Göttingen; 1911 außerordentlicher Professor für Statistik in Göttingen; 1918 Direktor des von ihm gegründeten Instituts für mathematische Statistik; 1921 ordentlicher Professor für Versicherungsmathematik und mathematische Statistik an der Universität Göttingen; 1933 Visiting Professor an der Columbia-Universität New York; 1936 Ordinarius für Biometrie. BERNSTEIN nimmt schon als Gymnasiast in Halle am Seminar CANTORS teil, siehe Haupttext. Nach seiner Dissertation verlegt BERNSTEIN sein Arbeitsgebiet von der Mengenlehre hin zur praktischen Mathematik. Er untersucht auch außermathematische Fragen: Im Jahre 1924 entdeckt er den Vererbungsmechanismus der Blutgruppen A, B und 0.

einen Beweis dieser Vermutung in CANTORs Seminar in Halle vor. Etwa gleichzeitig unternimmt ERNST SCHRÖDER[11] einen Beweisversuch, der jedoch Fehler aufweist.

Satz 7.3 (Satz von Cantor-Bernstein) *Unter* **ZF** *gilt* $\forall x, y\ ((x \preceq y \wedge y \preceq x) \longrightarrow x \sim y)$.

BEWEIS. Es genügt zu zeigen. daß gilt

(1) $\quad \forall a, b, c\ ((a \subseteq b \wedge b \subseteq c \wedge a \sim c) \longrightarrow b \sim c)$.

Sind dann nämlich $f\colon x \xrightarrow{inj.} y$ und $g\colon y \xrightarrow{inj.} x$, so gilt $g \circ f[x] \subseteq g[y] \subseteq x$ und $x \sim g \circ f[x]$, was wegen (1) auf $x \sim g[y]$ führt. Da g injektiv ist, ist $g\colon y \xrightarrow{bij.} g[y]$, also $y \sim g[y]$. Aus $x \sim g[y]$ und $y \sim g[y]$ folgt $x \sim y$.

BEWEIS von (1). Sei $f\colon c \xrightarrow{bij.} a$ und d sei der Abschluß von $c \setminus b$ unter f, also $d = \bigcup_{n<\omega} f^n[c \setminus b]$, wobei die Funktionenfolge $(f^n \mid n < \omega)$ rekursiv definiert ist durch $f^0 :\equiv \mathrm{id} \restriction c$ und $f^{n+1} :\equiv f \circ f^n$, siehe Abbildung 8. Wegen $\mathrm{ran}(f) \subseteq a$ gilt

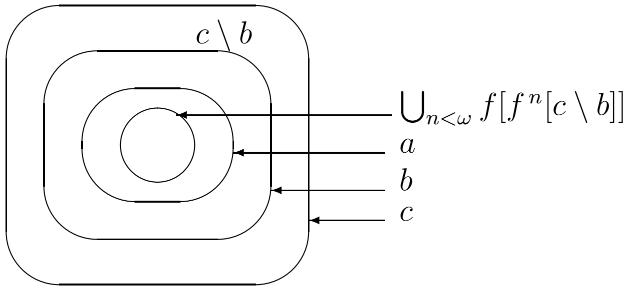


Abbildung 4: zum Beweis von 7.3

$$(*) \qquad d = (c \setminus b) + \underbrace{\bigcup_{n<\omega} f[f^n[c \setminus b]]}_{\subseteq a \subseteq b}.^{12}$$

Definiere g durch

$$g(u) :\equiv \begin{cases} f(u), & \text{falls } u \in d \\ u, & \text{falls } u \in c \setminus d. \end{cases}$$

[11]ERNST SCHRÖDER (25.11.1841, Mannheim–16.6.1902, Karlsruhe) Studium der Mathematik und der Physik in Heidelberg, u.a. bei LUDWIG OTTO HESSE (22.4.1811, Königsberg–4.8.1874, München), GUSTAV ROBERT KIRCHHOFF (12.3.1824, Königsberg–17.10.1887, Berlin) und KARL FREIHERR VON BUNSEN (25.8.1791, Korbach–28.11.1860, Bonn); 1862 Promotion, dann weitere Studien in Königsberg bis 1864; Habilitation in Zürich, danach als Lehrer in Pforzheim und Baden-Baden; ab 1876 ordentlicher Professor für Arithmetik, Trigonometrie und höhere Analysis an der TH Karlsruhe. Während seiner Zeit als Lehrer beschäftigt sich BERNSTEIN hauptsächlich mit arithmetischen, analytischen und algebraischen Fragestellungen; in seine Professorenzeit fallen dann umfangreiche Untersuchungen zur algebraischen Logik.

[12]Das Symbol + bezeichnet hier die Vereinigung disjunkter Mengen.

Wir zeigen $g\colon c \xrightarrow{bij.} b$, was (1) beweist. Aus $(*)$ folgt zunächst $g\colon c \to b$. Die Funktion g ist injektiv, da $g \restriction d$ und $g \restriction c \setminus d$ injektive Funktionen mit disjunktem Wertebereich sind. Die Funktion g ist surjektiv. Um dies zu sehen, fixiere $v \in b$. Ist $v \in b \setminus d \subseteq c \setminus d$ so ist $v = g(v)$; ist $v \in b \cap d$, so existiert ein $u \in c \setminus b$ mit

$$v = f^{n+1}(u) = f(\underbrace{f^{n}(u)}_{\equiv:\, u' \in d}).$$

Also ist $v = g(u')$. In beiden Fällen gilt somit $v \in \operatorname{ran}(g)$, d.h., g ist surjektiv. Damit ist (1) bewiesen. qed(1)

Dies vervollständigt den Beweis des Satzes von Cantor-Bernstein. QED

7.2 Messung von Mächtigkeiten.

Die Familie der $\sim$-Äquivalenzklassen ist ein natürlicher Parameter für Größenunterscheidungen bei Mengen. Allerdings sind die $\sim$-Äquivalenzklassen i.a. echte Klassen.[13] Dieses Problem wäre gelöst, wenn wir aus jeder $\sim$-Äquivalenzklasse ein „ausgezeichnetes“ Objekt als Repräsentanten dieser Klasse auswählen könnten. Ein zweites Problem tritt auf, wenn wir versuchen, Größen von Mengen zu vergleichen. Wir wollen, daß die Größen von je zwei Mengen vergleichbar sind, daß also für Mengen x und y stets $x \preceq y$ oder $y \preceq x$ gilt. Dies ist, wenn wir nur **ZF** voraussetzen, i.a. nicht der Fall. Die Hinzunahme des Auswahlaxiomes löst unsere Probleme jedoch mit einem Schlag. Da nämlich in **ZFC** nach 6.1 jede Menge bijektiv auf eine Ordinalzahl abgebildet werden kann, haben wir einerseits einen kanonischen Repräsentanten für jede $\sim$-Äquivalenzklasse $[x]_\sim$, nämlich die kleinste Ordinalzahl, die zu $[x]_\sim$ gehört, und können andererseits je zwei Mengen größenmäßig vergleichen, indem wir die den entsprechenden $\sim$-Äquivalenzklassen zugeordneten Ordinalzahlrepräsentanten vergleichen.[14] **Wir setzen deshalb von nun an ZFC voraus.** Im Licht der eben gemachten Überlegungen definieren wir:

Definition 7.4 Die Ordinalzahl $\overline{\overline{x}} :\equiv \operatorname{card}(x) :\equiv \min\left([x]_\sim \cap \mathrm{On}\right) = \min\{\alpha \,|\, x \sim \alpha\}$ heißt die **Kardinalität** oder auch **Mächtigkeit** von x.

Definition 7.5 (a) Wir definieren: α ist eine **Kardinalzahl** $:\equiv \exists x\, \overline{\overline{x}} = \alpha$.

(b) Die Klasse $\mathrm{Cd} :\equiv \{\alpha \,|\, \alpha \text{ ist eine Kardinalzahl}\}$ ist die **Klasse der Kardinalzahlen**, $\mathrm{Card} :\equiv \{\alpha \,|\, \alpha \in \mathrm{Cd} \wedge \alpha \geq \omega\}$ ist die **Klasse der unendlichen Kardinalzahlen**.

---

[13] z.B. $[1]_\sim \supseteq \{\{V_\alpha\} \,|\, \alpha \in \mathrm{On}\} \notin V$.

[14] Um auch in **ZF** den Begriff der Kardinalzahl zu definieren, „verkleinert“ man die $\sim$-Äquivalenz*klassen* zu Äquivalenz*mengen*, indem man mit $\alpha(x) :\equiv \min\{\alpha \,|\, [x]_\sim \cap V_\alpha \neq \emptyset\}$ von $[x]_\sim$ übergeht zu $[x]_\sim \cap V_{\alpha(x)}$. Dieses Verfahren wird manchmal „Scotts Trick“ genannt und oft angewendet, um echte Klassen in Mengen zu transformieren. Die hier angegebene Definition geht zurück auf Dana Stewart Scott (geb. 11.10.1932, Berkeley, Ca.) (1955), vgl. etwa die Einleitung zu [**?**] (p.8). Natürlich hat dieser Kardinalzahlbegriff weitaus weniger angenehme Eigenschaften als der in **ZFC** zur Verfügung stehende.

(Unendliche) Kardinalzahlen bezeichnen wir i.a. mit den Buchstaben $\kappa, \lambda, \mu, \nu$. Kardinalzahlen sind gerade diejenigen Ordinalzahlen, die nicht auf eine kleinere Ordinalzahl bijektiv abgebildet werden können. (Solche Ordinalzahlen werden manchmal als „initiale Ordinalzahlen“ bezeichnet.) Dieses und weitere fundamentale Resultate über Kardinalzahlen sind in folgendem Lemma zusammengestellt.

Lemma 7.6 *Es gilt:*
(a) $\alpha \in \mathrm{Cd} \longleftrightarrow \forall \beta < \alpha \neg \beta \sim \alpha$.
(b) $\alpha \in \mathrm{Cd} \longleftrightarrow \alpha = \overline{\overline{\alpha}}$.
(c) $\alpha \in \mathrm{Card} \longrightarrow \mathrm{Lim}(\alpha)$.

Beweis. zu (a). „$\Rightarrow$“. Sei $\alpha = \overline{\overline{x}}$. Gäbe es $\beta < \alpha$ mit $\beta \sim \alpha$, so wäre $\beta \sim x$ im Widerspruch zu $\alpha = \min\{\gamma \,|\, x \sim \gamma\}$.
„$\Leftarrow$“. Es ist $\alpha = \min\{\beta \,|\, \alpha \sim \beta\}$.
zu (b). Dies folgt leicht aus (a).
zu (c). Wäre $\alpha = \beta + 1$, so wäre durch

$$f(\gamma) :\equiv \begin{cases} \gamma + 1, & \text{falls } \gamma \in \omega \\ \gamma, & \text{falls } \omega \leq \gamma < \beta \\ 0, & \text{falls } \gamma = \beta \end{cases}$$

eine Bijektion $f\colon \alpha \xrightarrow{bij.} \beta$ gegeben. Dies widerspricht (a).
Damit ist das Lemma bewiesen. QED

Die Aussagen des nächsten Lemmas setzen die Kardinalitäten von zwei Mengen in Verbindung mit der Existenz von Abbildungen zwischen diesen Mengen.

Lemma 7.7 *Seien $x, y \in V$. Dann gilt:*
(a) $\overline{\overline{x}} = \overline{\overline{y}} \longleftrightarrow x \sim y$.
(b) Die folgenden Aussagen sind äquivalent
  (i) $\overline{\overline{x}} \leq \overline{\overline{y}}$.
  (ii) $\exists f\, f\colon x \xrightarrow{inj.} y$, *d.h.*, $x \preceq y$.
  (iii) $\exists f\, f\colon y \xrightarrow{surj.} x$.

Beweis. zu (a). „$\Rightarrow$“. Es gilt $x \sim \overline{\overline{x}} = \overline{\overline{y}} \sim y$, also $x \sim y$ wegen der Transitivität von $\sim$.
„$\Leftarrow$“. Es ist $x \sim y$ gleichwertig mit $[x]_\sim = [y]_\sim$, also $\overline{\overline{x}} = \min([x]_\sim \cap \mathrm{On}) = \min([y]_\sim \cap \mathrm{On}) = \overline{\overline{y}}$.
zu (b). „(i)$\Rightarrow$(ii)“. Sei $g\colon x \xrightarrow{bij.} \overline{\overline{x}}$ und $h\colon \overline{\overline{y}} \xrightarrow{bij.} y$. Setze $f :\equiv h \circ g$. Dann ist $f\colon x \xrightarrow{inj.} y$.
„(ii)$\Rightarrow$(iii)“. Sei $g\colon x \xrightarrow{inj.} y$. Ist $x = \emptyset$, so ist $\emptyset\colon y \xrightarrow{surj.} x$. Sei also $x \neq \emptyset$ vorausgesetzt. Setze $a :\equiv \mathrm{ran}(g)$. Dann ist $g^{-1}\colon a \xrightarrow{bij.} x$, so daß $f :\equiv g^{-1}$ im Fall $a = y$ das Gewünschte leistet. Im Fall $a \neq y$ wähle mit **(AC)** ein $v_0 \in x$ und setze

$$f(u) :\equiv \begin{cases} g^{-1}(u), & \text{falls } u \in a \\ v_0, & \text{falls } u \in y \setminus a. \end{cases}$$

Dann gilt $f\colon y \overset{surj.}{\longrightarrow} x$.
„(iii)⇒(ii)". Sei $g\colon y \overset{surj.}{\longrightarrow} x$. Wir definieren f so, daß f jedem $u \in x$ ein Urbild von u unter g zuordnet. (Ein solches existiert, da $\mathrm{ran}(g) = x$ ist.) Formal geschieht das wie folgt: $a :\equiv \{g^{-1}[\{u\}] \mid u \in x\}$ ist eine Menge paarweise disjunkter Mengen, die wegen der Surjektivität von g sämtlich nicht leer sind. Sei h eine Auswahlfunktion für a. D.h., es ist $h\colon a \to y$ mit $h(z) \in z$ für alle $z \in a$. Definiere $f\colon x \to y$ durch $f(u) :\equiv h(g^{-1}[\{u\}])$. Man sieht leicht, daß f injektiv ist.
„(ii)⇒(i)". Sei $f\colon x \overset{inj.}{\longrightarrow} y$. Sei $g\colon y \overset{bij.}{\longrightarrow} \overline{\overline{y}}$. Dann ist $h :\equiv g \circ f\colon x \overset{inj.}{\longrightarrow} \overline{\overline{y}}$. Es sei $\beta :\equiv \mathrm{otp}(\mathrm{ran}(h))$ und $\pi\colon \mathrm{ran}(h) \overset{bij.}{\longrightarrow} \beta$ sei der Mostowski-Isomorphismus. Wegen $\mathrm{ran}(h) \subseteq \overline{\overline{y}}$ ist $\beta \leq \overline{\overline{y}}$, siehe **??**. Dann ist $h' :\equiv \pi \circ h\colon x \overset{g\circ f=h}{\longleftrightarrow} \mathrm{ran}(h) \overset{\pi}{\longleftrightarrow} \beta$ eine Bijektion von x auf β. Nach Definition von $\overline{\overline{x}}$ muß dann $\overline{\overline{x}} \leq \beta$ sein. Da, wie gesehen, $\beta \leq \overline{\overline{y}}$ ist, folgt insgesamt folgt $\overline{\overline{x}} \leq \overline{\overline{y}}$.
Damit ist das Lemma bewiesen. QED

Corollar 7.8 *Es gilt* $\alpha < \beta \longrightarrow \overline{\overline{\alpha}} \leq \overline{\overline{\beta}}$.

Die Klasse der Kardinalzahlen ist unter der Vereinigung von Teilmengen abgeschlossen:

Lemma 7.9 *Es gilt:*
(a) $x \subseteq \mathrm{Cd} \longrightarrow \bigcup x \in \mathrm{Cd}$.
(b) $(x \subseteq \mathrm{Card} \wedge x \neq \emptyset) \longrightarrow \bigcup x \in \mathrm{Card}$.

Beweis. zu (a). Wir zeigen zunächst, daß $\bigcup x$ eine Ordinalzahl ist. Da $\bigcup x \in V$ gilt und die einzigen transitiven Teilmengen von On die Ordinalzahlen sind, siehe **??**, genügt es zu zeigen, daß $\bigcup x$ transitiv ist. Hierzu fixiere $u \in v \in \bigcup x$. Dann existiert eine Ordinalzahl $\alpha \in x$ mit $u \in v \in \alpha$. Da α transitiv ist, folgt $u \in \alpha$ und somit $u \in \bigcup x$. Also ist $\bigcup x$ eine Ordinalzahl λ. Wir zeigen $\lambda \in \mathrm{Cd}$, indem wir $\lambda = \overline{\overline{\lambda}}$ nachweisen.
zu $\geq$. Dies ist klar.
zu $\leq$. Sei $\alpha < \lambda$. Nach Definition von λ existiert dann eine Kardinalzahl $\kappa \in x$ mit $\alpha < \kappa$. Wegen $\kappa \in x$ ist $\kappa \leq \lambda$. Also ergibt sich $\alpha < \kappa = \overline{\overline{\kappa}} \leq \overline{\overline{\lambda}}$.
zu (b). Nach (a) ist $\bigcup x \in \mathrm{Cd}$. Wegen $x \neq \emptyset$ existiert $\kappa \in x$. Dann gilt $\kappa \geq \omega$ (wegen $x \subseteq \mathrm{Card}$) und $\kappa \leq \bigcup x$. Also ist $\omega \leq \bigcup x$.
Damit ist das Lemma bewiesen. QED

Wir können nun bereits gewisse Ordinalzahlen als Kardinalzahlen identifizieren:

Satz 7.10 *Es gilt:*
(a) $\omega \subseteq \mathrm{Cd}$.
(b) $\omega \in \mathrm{Card}$.

Beweis. zu (a). Wir zeigen durch Induktion nach $n < \omega$:

(1) $\forall m < n \, \neg\, m \sim n$.

$n = 0$. Dies ist klar.
$n = l + 1$. Angenommen es wäre $f\colon m \xrightarrow{bij.} n$ für ein $m < n$. Wegen $n \neq 0$ ist $m \neq 0$, d.h., es existiert ein $k < \omega$ mit $m = k + 1$. Es ist $k < l < n$ wegen $m < n = l + 1$. Wir unterscheiden nun zwei Fälle:
Fall 1. $f(k) = l$. In diesem Fall ist $f \restriction k\colon k \xrightarrow{bij.} l$, was der Induktionsvoraussetzung widerspricht.
Fall 2. $f(i_0) = l$ für ein $i_0 < k$. Durch

$$g(i) :\equiv \begin{cases} f(i), & \text{falls } i < k,\ i \neq i_0 \\ f(k), & \text{falls } i = i_0 \end{cases}$$

ist dann eine Bijektion $g\colon k \xrightarrow{bij.} l$ gegeben, was der Induktionsvoraussetzung widerspricht.
Somit ist (1) und damit auch (a) bewiesen.
zu (b). Weil $\omega \subseteq \mathrm{Cd}$ und Cd unter Vereinigung von Teilmengen abgeschlossen ist, folgt (b) aus

(2) $\bigcup \omega = \omega$.

Beweis. „$\subseteq$". Sei $u \in \bigcup \omega$. Dann ist $u \in n$ für ein $n \in \omega$. Da ω transitiv ist, folgt hieraus $u \in \omega$.
„$\supseteq$". Ist $n \in \omega$, so ist $n \in n + 1 \in \omega$ und deshalb $n \in \bigcup \omega$. qed(2)

Damit ist der Satz bewiesen. QED

7.3 Endliche, abzählbare und überabzählbare Mengen.

Wir nennen eine Menge a endlich, wenn es eine natürliche Zahl n gibt, so daß a genau n Elemente enthält; a ist abzählbar, wenn a gleichmächtig zur Menge der natürlichen Zahlen ist, und überabzählbar, wenn a weder endlich noch abzählbar ist.

Definition 7.11 Sei $a \in V$. Definiere
(a) a ist **endlich** $:\equiv \overline{\overline{a}} < \omega$.
(b) a ist **unendlich** $:\equiv \overline{\overline{a}} \geq \omega$.
(c) a ist **abzählbar** $:\equiv \overline{\overline{a}} = \omega$.
(d) a ist **höchstens abzählbar** $:\equiv \overline{\overline{a}} \leq \omega$.
(e) a ist **überabzählbar** $:\equiv \overline{\overline{a}} > \omega$.

Lemma 7.12 *Seien a und b endliche Mengen und es sei $x \in V$. Dann gilt:*
(a) Die Mengen $a \cup \{x\}$ und $a \cup b$ sowie $a \cap b$ und $a \times b$ sowie $a \setminus b$ und $\mathcal{P}(a)$ sind endlich. Es ist $\overline{\overline{\mathcal{P}(a)}} = 2^{\overline{\overline{a}}}$.
(b) Wenn gilt $\forall z(z \in a \to z$ ist endlich$)$, so sind $\bigcup a$ und $\mathsf{X}_{z \in a}\, z$ endlich.
(c) Jede Teilmenge einer endlichen Menge ist endlich.

Beweis. zu (a). Ist $x \in a$, so ist $\overline{\overline{a \cup \{x\}}} = \overline{\overline{a}} < \omega$. Ist $x \notin a$ und $f\colon a \xrightarrow{bij.} \overline{\overline{a}}$, so ist durch

$$g(u) :\equiv \begin{cases} f(u), & \text{falls } u \in a \\ \overline{\overline{a}}, & \text{falls } u = x \end{cases}$$

eine Bijektion zwischen $a \cup \{x\}$ und $\overline{\overline{a}} + 1$ gegeben; hieraus folgt $\overline{\overline{a \cup \{x\}}} \leq \overline{\overline{a}} + 1 < \omega$.
Die Endlichkeit von $a \cup b$ wird durch Induktion nach $\overline{\overline{b}} < \omega$ bewiesen: Ist $\overline{\overline{b}} = 0$, so ist $b = \emptyset$ und $a \cup b = a$ ist endlich. Ist $\overline{\overline{b}} > 0$, so wähle $x_0 \in b$. Dann ist $\overline{\overline{b \setminus \{x_0\}}} < \overline{\overline{b}}$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $a \cup (b \setminus \{x_0\})$ endlich, so daß nach dem bereits bewiesenen $a \cup b = (a \cup (b \setminus \{x_0\})) \cup \{x_0\}$ endlich ist.
Die Endlichkeit von $a \times b$ wird unter Benutzung des bereits gezeigten ebenfalls durch Induktion nach $\overline{\overline{b}}$ bewiesen. Beachte $a \times \emptyset = \emptyset$ und $a \times b = (a \times (b \setminus \{x_0\})) \cup (a \times \{x_0\})$, falls $x_0 \in b$.
Die Aussagen über die Endlichkeit der Komplementmenge und der Schnittmenge folgen aus (c).
Um die Aussage über die Kardinalität der Potenzmenge zu zeigen, genügt es, durch Induktion nach $n < \omega$ zu verifizieren:

(1) $\overline{\overline{\mathcal{P}(n)}} = 2^n$.

Dies ist richtig für $n = 0$ ($\mathcal{P}(0) = \{\emptyset\}$). Im Fall $n = k+1$ ist $\mathcal{P}(n) = \mathcal{P}(k) \cup \{u \cup \{k\} \mid u \in \mathcal{P}(k)\}$, und man sieht leicht, daß die Menge auf der rechten Seite des $=$-Zeichens die Kardinalität $2^k + 2^k = 2^{k+1} = 2^n$ hat.
zu (b). Durch Induktion über $\overline{\overline{a}}$ folgt die Endlichkeit von $\bigcup a$: Ist $\overline{\overline{a}} = 0$, so ist $a = \bigcup a = \emptyset$. Ist $\overline{\overline{a}} > 0$, so sei $x_0 \in a$. Es ist $\overline{\overline{a \setminus \{x_0\}}} < \overline{\overline{a}}$ und $\bigcup a = \bigcup (a \setminus \{x_0\}) \cup x_0$ ist wegen der Induktionsvoraussetzung eine Vereinigung von zwei endlichen Mengen, also nach (a) endlich.
Die Aussage über $\mathsf{X}_{z \in a}\, z$ folgt wegen

$$\mathop{\mathsf{X}}_{z \in a} z = \{f \mid f\colon a \to \bigcup a \wedge \forall z (z \in a \to f(z) \in z)\} \subseteq \mathcal{P}(a \times \bigcup a)$$

aus dem bereits bewiesenen und (c).

zu (c). Sei $u \subseteq a$. Durch die Inklusion ist dann eine injektive Funktion $u \xrightarrow{inj.} a$ gegeben. Also ist $\overline{\overline{u}} \leq \overline{\overline{a}} < \omega$.

Damit ist das Lemma bewiesen. QED

Wir charakterisieren die Endlichkeit einer Menge a durch Aussagen über den Zusammenhang zwischen der Injektivität und der Surjektivität von Abbildungen $a \to a$. Wir beginnen mit dem Nachweis notwendiger Bedingungen:

Satz 7.13 *Es gelte* **ZF**. *Sei $a \in V$ endlich. Dann gilt:*
(a) $\forall f\, (f\colon a \xrightarrow{inj.} a \longrightarrow f\colon a \xrightarrow{surj.} a)$. *In Worten: Jede Injektion von a in a ist surjektiv.*

(b) $\forall f\ (f\colon a \xrightarrow{surj.} a \longrightarrow f\colon a \xrightarrow{inj.} a)$. *In Worten: Jede Surjektion von a auf a ist injektiv.*

Beweis. zu (a). O.E. Sei $a = n < \omega$. Wir beweisen (a) durch Induktion nach n.
$n = 0$. In diesem Fall ist $f = \emptyset\colon \emptyset \to \emptyset$; also ist f surjektiv.
$n = k + 1$. Angenommen, f ist nicht surjektiv. Wir können dann o.E. annehmen, daß $k \notin \operatorname{ran}(f)$ ist. (Ansonsten wähle $k_0 \in n \setminus \operatorname{ran}(f)$ und gehe über von f zu f', das wie folgt definiert ist:

$$f'(i) :\equiv \begin{cases} f(i), & \text{falls } f(i) \neq k \\ k_0, & \text{falls } f(i) = k. \end{cases}$$

Dann gilt $f'\colon n \xrightarrow{inj.} n$ und es ist $k \notin \operatorname{ran}(f')$.) Nun ist $f \restriction k\colon k \xrightarrow{inj.} k$, also nach Induktionsvoraussetzung $\operatorname{ran}(f \restriction k) = k$. Wegen $k \notin \operatorname{ran}(f)$ ist $f(k) < k$, also $f(k) \in \operatorname{ran}(f \restriction k)$. Somit existiert ein $l < k$ mit $f(k) = f(l)$. Dies widerspricht der Injektivität von f. Also muß f doch surjektiv sein.

zu (b). Wir nehmen wieder o.E. $a = n \in \omega$ an und beweisen (b) durch Induktion nach n.
$n = 0$. Dann ist $f = \emptyset$ und injektiv.
$n = 1$. Die einzige Abbildung von $1 = \{0\}$ auf 1 ist die Identität; diese ist injektiv und surjektiv.
$n = k + 1$ mit $k \geq 1$. Angenommen, f ist nicht injektiv. Wir modifizieren f wie folgt: Definiere $f'\colon n \to n$ durch

$$f'(i) :\equiv \begin{cases} f(i), & \text{falls } f(i) \notin \{f(k), k\} \\ f(k), & \text{falls } f(i) = k \\ k, & \text{falls } f(i) = f(k). \end{cases}$$

Dann ist $f'(k) = k$, und mit f ist auch f' nicht injektiv. Ist $f'(l) \neq k$ für $l < k$, so ist $f' \restriction k\colon k \xrightarrow{surj.} k$ und nicht injektiv. Dies widerspricht der Induktionsvoraussetzung. Ist $f'(l) = k$ für ein $l < k$, so fixieren wir solches l und führen die folgende Modifikation durch: Definiere $f''\colon n \to n$ durch

$$f''(i) :\equiv \begin{cases} f'(i), & \text{falls } i \neq k \text{ und } f'(i) \neq k \\ 0, & \text{falls } i \neq k \text{ und } f'(i) = k \\ f'(k), & \text{falls } i = k. \end{cases}$$

Dann ist f'' surjektiv, $f''(i) < k$ für $i < k$ und $f''(l) = 0$ sowie $f''(k) = k$. Die Funktion $f'' \restriction k$ ist nicht injektiv: Um dies zu sehen wähle $i_0 < n$ mit $f'(i_0) = 0$. Dann ist $i_0 < k$ und $i_0 \neq l$ wegen $f'(l) = f'(k) = k > 0$. Aus der Definition von f'' folgt $f''(i_0) = 0$. Andererseits ist auch $f''(l) = 0$, also $f'' \restriction k$ nicht injektiv. Aus dem bisher über f'' gesagten folgt aber $f'' \restriction k\colon k \xrightarrow{surj.} k$. Dies widerspricht der Induktionsvoraussetzung.
Damit ist der Satz bewiesen. QED

Unter **ZFC** können wir auch die Umkehrung des letzten Satzes beweisen:

Satz 7.14 *Sei $a \in V$ unendlich. Dann gilt:*

(a) $\exists f\ f\colon \omega \xrightarrow{inj.} a$.

(b) $\exists f\ (f\colon a \xrightarrow{inj.} a \wedge \neg f\colon a \xrightarrow{surj.} a)$.

(c) $\exists f\ (f\colon a \xrightarrow{surj.} a \wedge \neg f\colon a \xrightarrow{inj.} a)$.

BEWEIS. zu (a). Die Unendlichkeit von a impliziert $\overline{\overline{\omega}} \leq \overline{\overline{a}}$ und dieses zieht $\omega \preceq a$ nach sich. Dies wird gerade in (a) behauptet.
zu (b), (c) Sei $\kappa :\equiv \overline{\overline{a}}$. Wir können o.E. $a = \kappa$ annehmen. Wegen $\kappa \geq \omega$ ist durch

$$f(\alpha) :\equiv \begin{cases} \alpha + 1, & \text{falls } \alpha < \omega \\ \alpha, & \text{sonst,} \end{cases}$$

eine Injektion von a auf a gegeben, die nicht surjektiv ist und durch

$$g(\alpha) :\equiv \begin{cases} 0, & \text{falls } \alpha = 0 \text{ oder } \alpha = 1 \\ \alpha - 1, & \text{falls } 1 < \alpha < \omega \\ \alpha, & \text{sonst,} \end{cases}$$

ist eine Surjektion von a auf a gegeben, die nicht injektiv ist.
Damit ist der Satz bewiesen. QED

Insgesamt haben wir also unter **ZFC** das folgende Resultat:

Satz 7.15 *Sei $a \in V$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *a ist endlich.*

(ii) $\forall f\ (f\colon a \xrightarrow{inj.} a \longrightarrow f\colon a \xrightarrow{surj.} a)$.

(iii) $\forall f (f\colon a \xrightarrow{surj.} a \longrightarrow f\colon a \xrightarrow{inj.} a)$.

Bemerkung 7.16 Dieser Satz ermöglicht es, den Begriff der endlichen Menge ohne Bezug auf Kardinalzahlen zu definieren. Eine derartige Definition des Endlichkeitsbegriffes stammt von DEDEKIND (1888): Man nennt eine Menge a **DEDEKIND-endlich**, wenn jede Injektion $f\colon a \to a$ auch surjektiv ist, d.h., wenn (ii) des obigen Satzes gilt. Wir haben bewiesen, daß der DEDEKINDsche Endlichkeitsbegriff zu dem von uns gewählten äquivalent ist. Hierbei sind wir nicht ohne das Auswahlaxiom ausgekommen. In der Tat kann man zeigen, daß diese Äquivalenz auf der Basis **ZF** (also ohne Auswahlaxiom) *nicht* beweisbar ist.

Das folgende Resultat widerspricht unserer an endliche Objekte angepaßten Erfahrung, da es aussagt, daß im Bereich der unendlichen Mengen ein echter Teil eines Ganzen gleich groß sein kann wie das Ganze selbst.

Corollar 7.17 *Es gilt: a ist unendlich $\longleftrightarrow \exists u\,(u \subseteq a \wedge u \neq a \wedge u \sim a)$.*

BEWEIS. „$\Rightarrow$“. Sei $f\colon a \to a$ eine Injektion, die nicht surjektiv ist. Setze $u :\equiv f[a]$. Dann ist $u \subseteq a$ und $u \neq a$. Ferner ist $a \sim u$ wegen $f\colon a \xrightarrow{bij.} u$.
„$\Leftarrow$“. Eine Bijektion $f\colon a \xrightarrow{bij.} u$ kann als Injektion $f\colon a \xrightarrow{inj.} a$ aufgefaßt werden. Wegen $u \neq a$ ist f nicht surjektiv. QED

7.4 Die Klasse Card der Kardinalzahlen.

Bis jetzt wissen wir wenig über die Klassen Cd und Card. In der Tat haben wir bisher keine Aussage darüber, ob Card neben ω überhaupt noch irgendeine andere Ordinalzahl enthält. Daß dies der Fall ist, wird sich aus folgendem Satz ergeben, der die für endliche Mengen gezeigte Eigenschaft, daß die Potenzmenge einer endlichen Menge a nicht gleichmächtig zur Menge a selbst ist, auf unendliche Mengen verallgemeinert.

Satz 7.18 (Satz von Cantor) *Es gilt* $\forall x\, x \not\sim \mathcal{P}(x)$.

BEWEIS. Angenommen, es ist $x \sim \mathcal{P}(x)$. Dann existiert $f\colon x \xrightarrow{bij.} \mathcal{P}(x)$. Sei

$$u :\equiv \{y \mid y \in x \wedge y \notin f(y)\}.$$

Wegen $u \in \mathcal{P}(x)$ ist $u = f(y)$ für ein $y \in x$. Es ist $y \in f(y)$ gleichwertig mit $y \in u$, und dies ist äquivalent zu $y \notin f(y)$. Dieser Widerspruch zeigt, daß $x \sim \mathcal{P}(x)$ nicht gelten kann. QED

Bemerkung 7.19 Das im Satz von CANTOR angewendete Beweisverfahren ist eine Version des CANTORschen Diagonalverfahrens, das CANTOR im Jahre 1891 in einem Vortrag mit dem Titel „Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre“ vorstellte, siehe auch [?], pp.278–281. Um das *Diagonalargument* dieses Beweises zu verdeutlichen, stellen wir uns eine Matrix $A = (a_{y,z})_{y,z \in x}$ vor, wobei

$$a_{y,z} = \begin{cases} 1, & \text{falls } y \in f(z) \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(Die Funktion $\chi_z :\equiv (a_{y,z} \mid y \in x)$ ist also die charakteristische Funktion von $f(z)$.) Durch die *Diagonale* der Matrix ist die Funktion $\chi\colon y \mapsto a_{y,y} (= \chi_y(y))$ gegeben. Die Funktion $1-\chi$ ist charakteristische Funktion einer Teilmenge u von x. Wegen $1-\chi(z) = 1-\chi_z(z) \neq \chi_z(z)$ ist aber $1 - \chi \neq \chi_z$ für jedes $z \in x$, und somit $u \notin \{f(z) \mid z \in x\}$, d.h., f ist nicht surjektiv.

Corollar 7.20 *Es gilt* $\forall x\, \overline{\overline{x}} < \overline{\overline{\mathcal{P}(x)}}$.

BEWEIS. Da durch $i \mapsto \{i\}$ eine Injektion von x in $\mathcal{P}(x)$ definiert ist, ist $\overline{\overline{x}} \leq \overline{\overline{\mathcal{P}(x)}}$. Nach dem Satz von CANTOR ist andererseits $\overline{\overline{x}} \neq \overline{\overline{\mathcal{P}(x)}}$. QED

Corollar 7.21 *Die Klasse der Kardinalzahlen ist nicht beschränkt in der Klasse der Ordinalzahlen:* $\forall\alpha \in \mathrm{On}\ \exists\kappa \in \mathrm{Card}\ \alpha < \kappa$. *Insbesondere ist* Card *eine echte Klasse.*

BEWEIS. O.E. sei $\alpha \geq \omega$ (sonst betrachte ω statt α). Sei $\kappa :\equiv \overline{\overline{\mathcal{P}(\alpha)}}$. Wäre $\kappa \leq \alpha$, so wäre $\kappa = \overline{\overline{\kappa}} \leq \overline{\overline{\alpha}}$, also $\overline{\overline{\mathcal{P}(\alpha)}} \leq \overline{\overline{\alpha}}$ im Widerspruch zu 7.20. Wäre schließlich $\mathrm{Card} \in V$, so wäre $\kappa :\equiv \bigcup \mathrm{Card} \in \mathrm{Cd}$ nach 7.9. Nach dem bereist gezeigten gibt es $\lambda \in \mathrm{Card}$ mit $\lambda > \kappa$. Aus $\lambda \in \mathrm{Card}$ folgt aber $\lambda \leq \bigcup \mathrm{Card} = \kappa$, ein Widerspruch. QED

Bemerkung 7.22 Wir bemerken ohne Beweis, daß 7.21 in Abwesenheit des Potenzmengenaxioms nicht gilt.

Da es zu jeder Ordinalzahl eine größere Kardinalzahl gibt, können wir von der kleinsten dieser Kardinalzahlen sprechen. Wir definieren:

Definition 7.23 Für jede Ordinalzahl α setze $\alpha^+ :\equiv \min\{\kappa \mid \kappa \in \mathrm{Card} \wedge \kappa > \alpha\}$. Im Fall $\alpha \in \mathrm{Card}$ heißt α^+ der **kardinale Nachfolger** von α.

Bemerkung 7.24 Für $\alpha < \omega$ ist $\alpha^+ = \omega$; für $\alpha \geq \omega$ ist $\alpha^+ > \alpha + 1$, $\alpha + \omega$, $\alpha + \alpha$, $\alpha \cdot \omega$, $\alpha \cdot \alpha$, α^α, ... Hierbei bezeichnen $+$ und $\cdot$ sowie Exponentiation die jeweiligen Ordinalzahloperationen.

Ähnlich wie bei Ordinalzahlen können wir nun zwei verschiedene Arten von Kardinalzahlen unterscheiden, nämlich Nachfolgerkardinalzahlen und Limeskardinalzahlen:

Definition 7.25 Sei $\kappa \in \mathrm{Card}$. Definiere

(a) κ ist eine **Nachfolgerkardinalzahl** $:\equiv \exists\lambda \in \mathrm{Card}\ \kappa = \lambda^+$.

(b) κ ist eine **Limeskardinalzahl** $:\equiv \neg\exists\lambda \in \mathrm{Card}\ \kappa = \lambda^+$.

Bemerkung 7.26 Beachten Sie, daß auch eine Nachfolger*kardinal*zahl eine Limes*ordinal*zahl ist, siehe 7.6.

Beispiel 7.27 Die Ordinalzahl ω ist eine Limeskardinalzahl; für $\lambda \in \mathrm{Card}$ gilt nämlich $\lambda \geq \omega$ und somit $\lambda^+ > \omega$.

Das folgende Lemma rechtfertigt die Bezeichnung *Limes*kardinalzahl:

Lemma 7.28 *Sei* $\kappa \in \mathrm{Card}$. *Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) κ *ist eine Limeskardinalzahl.*

(ii) $\kappa = \sup\{\lambda \mid \lambda \in \mathrm{Cd} \wedge \lambda < \kappa\}$.

BEWEIS. „(i)⇒(ii)". Sei $\kappa \in \mathrm{Card}$ eine Limeskardinalzahl. Ist $\kappa = \omega$, so ist $\{\lambda \mid \lambda \in \mathrm{Cd} \wedge \lambda < \kappa\} = \omega$ und die Behauptung folgt aus $\omega = \sup \omega$. Ist $\kappa > \omega$, so ist $\omega \in \{\lambda \mid \lambda \in \mathrm{Cd} \wedge \lambda < \kappa\}$ und somit

$$\sup\{\lambda \mid \lambda \in \mathrm{Cd} \wedge \lambda < \kappa\} = \sup\{\lambda \mid \lambda \in \mathrm{Card} \wedge \lambda < \kappa\}.$$

Sei $x :\equiv \{\lambda \mid \lambda \in \text{Card} \wedge \lambda < \kappa\}$. Dann ist $\omega \in x$ und $\mu :\equiv \bigcup x \in \text{Card}$, da Card nach 7.9 unter der Vereinigung von nicht-leeren Teilmengen abgeschlossen ist. Offenbar ist $\mu \leq \kappa$. Wäre $\mu < \kappa$, so wäre auch $\mu^+ < \kappa$, da κ eine Limeskardinalzahl ist. Also $\mu^+ \in x$, d.h., $\mu^+ \leq \mu$, ein Widerspruch. Damit ist $\mu = \kappa$ bewiesen, und dies war zu zeigen.

„(ii)⇒(i)". Es ist $\kappa = \mu^+$ nur für $\mu < \kappa$ möglich. Falls $\kappa = \mu^+$ wäre also $\kappa = \sup\{\lambda \mid \lambda \in \text{Cd} \wedge \lambda < \kappa\} = \sup\{\lambda \mid \lambda \in \text{Cd} \wedge \lambda \leq \mu\} = \mu < \kappa$, ein Widerspruch. Also ist κ eine Limeskardinalzahl. QED

Mit Hilfe der Ordinalzahlen können wir die Klasse Card aufzählen. Dies wird von der $\aleph$-Hierarchie geleistet, die wir nun rekursiv definieren.[15] Definition und Bezeichnung der $\aleph$-Hierarchie gehen auf CANTOR zurück.

Definition 7.29 Definiere rekursiv eine funktionale Klasse $\aleph\colon \text{On} \to V$ mit

(i) $\aleph_0 = \omega$,

(ii) $\aleph_{\alpha+1} = \aleph_\alpha^+$,

(iii) $\aleph_\delta = \bigcup_{\alpha<\delta} \aleph_\alpha$, falls $\text{Lim}(\delta)$.

Wir schreiben $\aleph_\alpha$ statt $\aleph(\alpha)$.

Satz 7.30 *Es gilt:*

(a) $\alpha < \beta \longrightarrow \aleph_\alpha < \aleph_\beta$.

(b) $\text{Card} = \{\aleph_\alpha \mid \alpha \in \text{On}\}$.

BEWEIS. zu (a). Dies beweist man leicht durch Induktion nach β unter Benutzung der Ungleichung $\gamma^+ > \gamma$.

zu (b) „$\supseteq$". Durch Induktion nach α zeigt man $\aleph_\alpha \in \text{Card}$. Man benutzt $\kappa^+ \in \text{Card}$ im Nachfolgerschritt und $\bigcup x \in \text{Card}$ für $x \subseteq \text{Card}$ im Limesschritt.

„$\subseteq$". Sei $\kappa \in \text{Card}$. Wir können $\kappa > \omega$ annehmen wegen $\aleph_0 = \omega$.

(1) $\exists \beta \in \text{On}\ \aleph_\beta \geq \kappa$.

BEWEIS. Angenommen nicht. Dann ist $A :\equiv \{\aleph_\alpha \mid \alpha \in \text{On}\} \subseteq \kappa$, also nach **(Aus)** eine Menge. Andererseits ist durch $\alpha \mapsto \aleph_\alpha$ wegen (a) eine Bijektion $\aleph\colon \text{On} \xrightarrow{bij.} A$ gegeben, so daß nach **(Ers)** $\text{On} \in V$ gilt, was nicht der Fall ist. Also muß (1) doch richtig sein. qed(1)

Sei nun $\alpha :\equiv \min\{\beta \mid \aleph_\beta \geq \kappa\}$. Dann gilt

(2) $\kappa = \aleph_\alpha$.

BEWEIS. Angenommen nicht. Dann gilt

(*) $\beta < \alpha \longrightarrow \aleph_\beta < \kappa < \aleph_\alpha$.

[15] $\aleph$, lies: alef [mit Betonung auf dem a], ist der erste Buchstabe des hebräischen Alphabetes.

Wir unterscheiden nun zwei Fälle:
Fall 1. $\alpha = \beta + 1$. Aus $(*)$ folgt dann $\aleph_\alpha = \aleph_\beta^+ \leq \kappa < \aleph_\alpha$, ein Widerspruch.
Fall 2. $\mathrm{Lim}(\alpha)$. In diesem Fall liefert $(*)$ $\aleph_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \aleph_\beta \leq \kappa < \aleph_\alpha$, ein Widerspruch.
Da $\alpha > 0$ gilt wegen $\kappa > \omega$, sind hiermit alle möglichen Fälle abgehandelt. Die sich ergebenden Widersprüche zeigen, daß (2) doch richtig sein muß. qed(2)

Damit ist der Satz bewiesen. QED

Bemerkung 7.31 Es ist auch die Bezeichnung ω_α für $\aleph_\alpha$ üblich.

Ist eine Kardinalzahl κ vorgegeben, so läßt sich anhand der Platznummer von κ in der $\aleph$-Hierarchie bestimmen, ob κ Nachfolger oder Limes ist:

Lemma 7.32 *Sei* $\kappa \in \mathrm{Card}$. *Dann gilt:*
(a) κ *ist eine Nachfolgerkardinalzahl* $\longleftrightarrow \exists \alpha\, \kappa = \aleph_{\alpha+1}$.
(b) κ *ist eine Limeskardinalzahl* $\longleftrightarrow \kappa = \aleph_0 \vee \exists \delta(\mathrm{Lim}(\delta) \wedge \kappa = \aleph_\delta)$.

Beweis. Es genügt, (a) zu beweisen.
„$\Rightarrow$“. Sei $\kappa = \lambda^+$. Wähle α mit $\lambda = \aleph_\alpha$. Dann ist $\kappa = \aleph_\alpha^+ = \aleph_{\alpha+1}$.
„$\Leftarrow$“. Es ist $\kappa = \aleph_\alpha^+$, also ein Nachfolger. QED

8 Das Hausdorffsche Paradoxon

9 Formale Sprachen.

Wir haben im vorangehenden Kapiteln gesehen, dass das Auswahlaxiom unintuitive Konsequenzen besitzt, die zu der Frage führen, ob das Axiom im Kontext der übrigen Axiome widerspruchsfrei ist. Die Widerspruchsfreiheit wäre besonders angesichts der guten Konsequenzen des Auswahlaxioms wünschenswert, die wir zum Beispiel im Kapitel über Kardinalzahlen kennengelernt haben.
Dies führt zu „axiomatischen Überlegungen“: Wir möchten die Konsistenz des Systems ZFC zeigen. Ohne auf Details einzugehen, besagt der zweite Gödelsche Unvollständigkeitssatz, dass diese Konsistenz nicht mit den üblichen mathematischen Mitteln bewiesen werden kann. Eine genügend ausdrucksreiche, durch Listen von Axiomen gegebene Theorie kann nicht ihre eigene Konsistenz beweisen. Dennoch konnte Gödel ein Resultat zeigen, das besagt, dass das System ZFC nicht widersprüchlicher als das einfachere System ZF ist. Gödel bewies durch die Konstruktion *innerer Modelle der Mengenlehre*: wenn das System ZF widerspruchsfrei ist, so ist auch das System ZFC widerspruchsfrei. Da die Axiome von ZF eine gute intuitive Begründung besitzen, ist dies in einem gewissen Sinn einen Widerspruchsfreiheitsbeweis von ZFC.
Wir wollen in den folgenden Kapiteln das Resultat von Gödel mit Hilfe der Klasse HOD der *erblich Ordinalzahl-definierbaren Mengen* zeigen (*hereditarily ordinal definable*).

Die *Ordinalzahl-definierbaren* Mengen sind diejenigen Mengen, die mit Hilfe einer Formel der Mengenlehre und Ordinalzahl-Parametern definiert werden können. Die *erblich* Ordinalzahl-definierbaren Mengen sind solche, die selbst und alle iterierten $\in$-Vorgänger Ordinalzahl-definierbar sind.
Diese Beschreibung der Klasse HOD ist informell, denn wir fragen, ob es für eine betrachtete Menge x eine $\in$-Formel gibt, die x definiert. Dies kann nur dann zu einer $\in$-Definition von HOD gemacht werden, wenn die Gesamtheit der $\in$-Formeln und ein Teil der Theorie der Definierbarkeit im System ZF selbst formalisiert ist. Dies wird die Aufgabe der folgenden Kapitel sein.
Generell kann man neben die arithmetischen und geometrischen Grundstrukturen die logischen Grundstrukturen stellen. Elektronische Datenverarbeitung ist weniger elektronische *Arithmetik* als die elektronische Verarbeitung von *logischen* Entitäten wie Symbolen und daraus gebildete Wörtern. Eine umfassende Formalisierung der Mathematik, die auch die Grundstrukturen der Informatik umfasst, innerhalb des Systems ZF erfordert daher auch die Formalisierung von Logik. Wir arbeiten in diesem Kapitel im Axiomensystem ZF.

9.1 Alphabete, Zeichenreihen und Sprachen.

Definition 9.1 Ein **Alphabet** A ist eine nicht-leere Menge. Jedes Element von A wird als **Zeichen aus** A bezeichnet. Es sei $A^* :\equiv {}^{<\omega}A :\equiv \bigcup_{n<\omega} {}^{n}A \equiv \{f \mid \exists n < \omega\ f\colon n \to A\}$. Jedes Element $w \in A^*$ heißt **Zeichenreihe** (oder auch **String** bzw. **Wort**) über A, die natürliche Zahl $|w| :\equiv \mathrm{dom}(w)$ heißt **Länge** von w. Es sei $\Box :\equiv \emptyset$ das **leere Wort**.

Bemerkung 9.2 Wir identifizieren das Zeichen $a \in A$ mit der Zeichenreihe $(a|i < 1) \in A^*$ und können so $A \subseteq A^*$ schreiben. Einen String $f = (f(i)|i < n) \in A^*$ schreiben wir manchmal auch in der Form $f(0)f(1)\dots f(n-1)$.

Wir definieren die folgenden Operationen und Relationen auf Wörtern:

Definition 9.3 Seien $v, w \in A^*$.

(a) Wir definieren die **Verkettung** (auch: **Konkatenation**) von v und w durch $v^\frown w :\equiv vw :\equiv v \cup \{(|v| + i, w(i)) \mid i < |w|\}$.
Wir definieren das **Anhängen eines Zeichens** $a \in A$ an v durch $v^\frown a :\equiv va :\equiv v^\frown\{(0, a)\}$.

(b) Die Relation $v \sqsubseteq w :\equiv \exists m \leq \mathrm{dom}(w)\ v = w \upharpoonright m$ besagt: v ist ein **Anfangsstück** von w.

Lemma 9.4 *Sei A ein Alphabet. Dann ist* $\overline{\overline{A^*}} = \overline{\overline{A}} + \aleph_0$.

9.2 Terme und Formeln.

Definition 9.5 Eine **(formale) Sprache** ist ein 4-Tupel (I, J, K, t), wobei I, J und K paarweise disjunkte Mengen sind und $t\colon I \cup J \to \omega$ gilt.

9.3 Terme und Formeln.

Fixiere eine Sprache $L = (I, J, K, t)$. Wir definieren ein zu dieser Sprache „passendes" Alphabet A_L, wobei I, J, K als Indexmengen für Relations-, Funktions- und Konstantensymbole verwendet werden und t die Stellenzahl der Relations- und Funktionssymbole liefert.

Definition 9.6 Das **Alphabet** A_L **von** L ist diejenige Menge, die genau die folgenden Elemente enthält:

(i) **Klammern**: $\dot{(} :\equiv (0,0)$, $\dot{)} :\equiv (1,0)$;

(ii) **Variablen**: für jedes $n < \omega$ das Element $\dot{v}_n :\equiv (2, n)$;

(iii) **Junktoren**: $\dot{\wedge} :\equiv (3,0)$ (**und**, **Konjunktion**), $\dot{\neg} :\equiv (4,0)$ (**nicht**, **Negation**);

(iv) **Quantor**: $\dot{\forall} :\equiv (5,0)$;

(v) **Identität**: $\dot{=} :\equiv (6,0)$;

(vi) **Relationssymbole**: für jedes $i \in I$ das Element $\dot{R}_i :\equiv (7, i)$;

(vii) **Funktionssymbole**: für jedes $j \in J$ das Element $\dot{f}_j :\equiv (8, j)$;

(viii) **Konstantensymbole**: für jedes $k \in K$ das Element $\dot{c}_k :\equiv (9, k)$.

Hier wird ein Alphabet erklärt, dessen Symbole bestimmte Aufgaben in einer Formalisierung der mathematischen Sprache übernehmen werden. Wie die Symbole im einzelnen festgelegt werden, ist unerheblich. Wichtig ist, dass sie eindeutig festgelegte und paarweise verschiedene Mengen sind. Die jeweiligen Mengen (= Symbole) werden als Klassenterme eingeführt, die wir mit Abkürzungen bezeichnen, die auf ihre spätere Verwendung hinweisen. So wird die Menge $(1,0)$ später die „Funktion" einer rechten Klammer erfüllen: $\dot{)} :\equiv (1,0)$.
Wir formalisieren nun den sukzessiven Aufbau von mathematischen Formeln durch Terme, atomare Formeln und Formeln. Hierzu benötigen wir eine Verallgemeinerung der Konkatenationsfunktion $^\frown$:

Definition 9.7 Sei A ein Alphabet, $n < \omega$, $s\colon n \to A^*$ und $i \leq n$. Durch Rekursion nach $j \in \{-1\} \cup n$ definieren wir das Element $s(i)^\frown \cdots ^\frown s(j)$ von A^*:
im Fall $j < i$ sei $s(i)^\frown \cdots ^\frown s(j) :\equiv \Box$;
im Fall $j \geq i$ sei $s(i)^\frown \cdots ^\frown s(j) :\equiv (s(i)^\frown \cdots ^\frown s(j-1))^\frown s(j)$.
Wir schreiben auch $s(i) \ldots s(j)$ statt $s(i)^\frown \cdots ^\frown s(j)$.

Definition 9.8 Die Menge $\mathrm{Tm}(L)$ der L-**Terme** ist die $\subseteq$-kleinste Teilmenge von A_L^*, für die gilt:

(T1) $\forall n < \omega\ \dot{v}_n \in \mathrm{Tm}(L)$;

(T2) $\forall k \in K\ \dot{c}_k \in \mathrm{Tm}(L)$;

(T3) $\forall j \in J \forall s\ (s\colon t(j) \to \mathrm{Tm}(L) \longrightarrow \dot{f}_j{}^\frown s(0)^\frown \cdots ^\frown s(t(j)-1) \in \mathrm{Tm}(L))$.

Bemerkung 9.9 (a) Es ist also $\mathrm{Tm}(L) = \bigcap\{x \subseteq A_L^* \mid x \text{ erfüllt (T1), (T2) und (T3)}\}$; diese Menge existiert nach dem Aussonderungsaxiom angewendet auf die Menge A_L^*.

(b) Die von uns gewählte Schreibweise, in der die Operatoren vor den Operanden stehen, bezeichnet man als **polnische Notation**. Ausdrücke in polnischer Notation sind auch ohne Klammern eindeutig lesbar. In der Praxis benutzen wir allerdings meistens Terme, die nicht in polnischer Notation sind. So schreiben wir z.B. normalerweise $x+y$ statt $+xy$. Solche Terme lassen sich aber leicht in die polnische Notation umformen.

Definition 9.10 Die Menge der **atomaren Formeln**, $\mathrm{At}(L)$, ist definiert durch $\mathrm{At}(L) :\equiv \{s_1 \doteq s_2 \,|\, s_1 \in \mathrm{Tm}(L) \wedge s_2 \in \mathrm{Tm}(L)\} \cup \{\dot{R}_i{}^\frown s(0)^\frown \cdots {}^\frown s(t(i)-1) \,|\, i \in I \wedge s\colon t(i) \to \mathrm{Tm}(L)\}$.

Definition 9.11 Die Menge $\mathrm{Fml}(L)$ der **L-Formeln** ist die $\subseteq$-kleinste Teilmenge von A_L^*, für die folgendes gilt:

(F1) $\mathrm{At}(L) \subseteq \mathrm{Fml}(L)$;

(F2) $\forall \varphi, \psi \in \mathrm{Fml}(L)\ \dot{(}\varphi \dot{\wedge} \psi\dot{)} \in \mathrm{Fml}(L)$;

(F3) $\forall \varphi \in \mathrm{Fml}(L)\ \dot{\neg} \varphi \in \mathrm{Fml}(L)$;

(F4) $\forall n < \omega\, \forall \varphi \in \mathrm{Fml}(L)\ \dot{\forall} \dot{v}_n \varphi \in \mathrm{Fml}(L)$.

Offensichtlich kann man die gewöhnlichen Formeln in dieser Formalisierung nachbilden. Allerdings muss überprüft werden, dass ein Element von $\mathrm{Fml}(L)$ „eindeutig lesbar" ist, damit es eine eindeutige Bedeutung im logischen Kontext hat. Hierzu ist eine detaillierte Untersuchung von Termen und Formeln erforderlich. Die eindeutige Lesbarkeit kann auf verschiedene Arten erreicht werden (polnische Notation, Klammersetzung) und ist intuitiv vertraut. Die Einzelheiten der Beweise der eindeutigen Lesbarkeit sind allerdings technisch und hängen von Details der Formalisierung ab, die für unsere Zwecke nicht entscheidend sind. Bei Bedarf könnte man die Syntax auch abändern, um Eindeutigkeitsbeweise zu vereinfachen.

Satz 9.12 (Eindeutige Lesbarkeit der Terme) *Terme sind auf eindeutige Weise in Subterme (Unterterme) zerlegbar. D.h., ist $s \in \mathrm{Tm}(L)$, so gilt genau eine der folgenden Aussagen:*

(i) Es gibt genau ein $n < \omega$, so daß $s = \dot{v}_n$;

(ii) Es gibt genau ein $k \in K$, so daß $s = \dot{c}_k$;

(iii) Es existiert genau ein $j \in J$ und genau ein $r\colon t(j) \to \mathrm{Tm}(L)$, so daß $s = \dot{f}_j{}^\frown r(0)^\frown \cdots {}^\frown r(t(j)-1)$ gilt.

Satz 9.13 (Eindeutige Lesbarkeit der Formeln) *Jede Formel kann auf eindeutige Weise in Subformeln zerlegt werden: $[(]^L) \cap \mathrm{Fml}(L) = \emptyset$ und für jedes $\varphi \in \mathrm{Fml}(L)$ gilt genau eine der folgenden Aussagen:*

(i) Es gibt genau ein $s_1 \in \mathrm{Tm}(L)$ und genau ein $s_2 \in \mathrm{Tm}(L)$, so daß $\varphi = s_1 \doteq s_2$.

(ii) Es gibt genau ein $i \in I$ und genau ein $s\colon t(i) \to \mathrm{Tm}(L)$, so daß $\varphi = \dot{R}_i s(0) \ldots s(t(i)-1)$.

(iii) Es gibt genau ein $\psi \in \mathrm{Fml}(L)$ und genau ein $\chi \in \mathrm{Fml}(L)$, so daß $\varphi = \dot{(}\psi \dot{\wedge} \chi\dot{)}$.

(iv) *Es gibt genau ein* $\psi \in \mathrm{Fml}(L)$*, so daß* $\varphi = \dot{\neg}\,\psi$.

(v) *Es gibt genau ein* $n < \omega$ *und genau ein* $\psi \in \mathrm{Fml}(L)$*, so daß* $\varphi = \dot{\forall}\dot{v}_n\psi$.

9.4 Induktion und Rekursion.

Die rekursive Natur von Termen und Formeln ermöglicht es, das Beweisprinzip *Induktion* und das Konstruktionsprinzip *Rekursion* auf Terme und Formeln zu übertragen.

Satz 9.14 (Induktion über den Termaufbau) *Sei* χ *eine* $\in$*-Formel. Es gelte:*

(i) $\forall n < \omega\ \chi(\dot{v}_n)$ *und* $\forall\, k \in K\ \chi(\dot{c}_k)$;

(ii) $\forall\, j \in J\, \forall s\colon t(j) \to \mathrm{Tm}(L)\ (\forall\, i < t(j)\ \chi(s(i)) \longrightarrow \chi(\dot{f}_j s(0) \ldots s(t(j)-1)))$.

Dann gilt $\forall s \in \mathrm{Tm}(L)\ \chi(s)$.

Beweis. $T :\equiv \{s \in \mathrm{Tm}(L) \mid \chi(s)\}$ erfüllt (T1), (T2) und (T3). Wegen der $\subseteq$-Minimalität von $\mathrm{Tm}(L)$ ist also $T = \mathrm{Tm}(L)$. QED

Eine mathematische Eigenschaft χ trifft also auf alle L-Terme zu, wenn sie auf alle Variablen und alle Konstantensymbole zutrifft, und wenn für jedes $j \in J$ aus der Gültigkeit von χ für je $t(j)$-viele Terme $s(0), \ldots, s(t(j)-1)$ die Gültigkeit von χ für $\dot{f}_j s(0) \ldots s(t(j)-1)$ folgt.

Satz 9.15 (Induktion über den Formelaufbau) *Sei* χ *eine* $\in$*-Formel. Es gelte:*

(i) $\forall \psi \in \mathrm{At}(L)\ \chi(\psi)$;

(ii) $\forall \psi, \chi \in \mathrm{Fml}(L)\ ((\chi(\psi) \wedge \chi(\chi)) \longrightarrow (\chi(\dot{(}\psi \dot{\wedge} \chi\dot{)}) \wedge \chi(\dot{\neg}\,\psi)))$;

(iii) $\forall \psi \in \mathrm{Fml}(L)\, \forall n < \omega\ (\chi(\psi) \longrightarrow \chi(\dot{\forall}\dot{v}_n\psi))$.

Dann gilt $\forall \psi \in \mathrm{Fml}(L)\ \chi(\psi)$.

Beweis. Analog zu Beweis des Induktionssatzes für Terme. QED

Satz 9.16 (Rekursion über den Termaufbau) *Seien* $G_{var}, G_{const}, G_{fun}\colon V \to V$*. Dann existiert genau ein* $H\colon \mathrm{Tm}(L) \to V$ *mit:*

(i) $\forall\, n < \omega\ H(\dot{v}_n) = G_{var}(\dot{v}_n)$;

(ii) $\forall\, k \in K\ H(\dot{c}_k) = G_{const}(\dot{c}_k)$;

(iii) $\forall\, j \in J\, \forall s\colon t(j) \to \mathrm{Tm}(L)\ H(\dot{f}_j s(0) \ldots s(t(j)-1)) = G_{fun}(j, s, (H(s(i)) | i < t(j)))$.

Beweis. Definieren wir $T_0 :\equiv \{\dot{v}_n \mid n < \omega\} \cup \{\dot{c}_k \mid k \in K\}$, $T_{n+1} :\equiv T_n \cup \{\dot{f}_j s(0) \ldots s(t(j)-1) \mid j \in J \wedge s\colon t(j) \to T_n\}$, so ist $\mathrm{Tm}(L) = \bigcup_{n<\omega} T_n$. Wegen der eindeutigen Lesbarkeit der Terme läßt sich $H \restriction T_n$ leicht rekursiv so definieren, daß (i), (ii) und (iii) gelten. Damit ist die Existenz von H gesichert. Die Eindeutigkeit folgt ebenfalls leicht aus der eindeutigen Lesbarkeit der Terme. QED

Satz 9.17 (Rekursion über den Formelaufbau) *Seien* $G_{at}, G_{\dot{\wedge}}, G_{\dot{\neg}}, G_{\dot{\forall}}\colon V \to V$*. Dann existiert genau ein* $H\colon \mathrm{Fml}(L) \to V$ *mit:*

(i) $\forall\varphi \in \mathrm{At}(L)\ H(\varphi) = G_{at}(\varphi)$;

(ii) $\forall\varphi, \psi \in \mathrm{Fml}(L)\ H(\dot{(}\varphi\dot{\wedge}\psi\dot{)}) = G_{\dot{\wedge}}(\varphi, \psi, H(\varphi), H(\psi))$;

(iii) $\forall\varphi \in \mathrm{Fml}(L)\ H(\dot{\neg}\varphi) = G_{\dot{\neg}}(\varphi, H(\varphi))$;

(iv) $\forall\varphi \in \mathrm{Fml}(L)\,\forall n < \omega\ H(\dot{\forall}\dot{v}_n\varphi) = G_{\dot{\forall}}(n, \varphi, H(\varphi))$.

Beweis. Dies beweist man ganz analog zum Rekursionssatz über den Termaufbau. QED

Beispiele für die Anwendung der Rekursionssätze liefern die folgenden Definitionen.

Definition 9.18 Für $t \in \mathrm{Tm}(L)$ definieren wir rekursiv die **Menge der Variablen** von t, $\mathrm{var}(t)$, durch $\mathrm{var}(\dot{v}_n) :\equiv \{\dot{v}_n\}$ und $\mathrm{var}(\dot{c}_k) = \emptyset$ sowie $\mathrm{var}(\dot{f}_j s(0) \dots s(t(j)-1)) = \bigcup_{i<t(j)} \mathrm{var}(s(i))$.

Bemerkung 9.19 Um diese Rekursion formal durchzuführen setzen wir
$G_{var} :\equiv \{(x, \{x\}) \mid x \in V\}$, $G_{const} :\equiv \{(x, \emptyset) \mid x \in V\}$
und $G_{fun} :\equiv \{((j, f, g), \bigcup \mathrm{ran}(g)) \mid j \in V \ \wedge\ f \in V \ \wedge\ g \in V\}$.

Definition 9.20 Für $\varphi \in \mathrm{Fml}(L)$ definieren wir rekursiv die **Menge der Variablen** von φ, $\mathrm{var}(\varphi)$, und die **Menge der freien Variablen** von φ, $\mathrm{fr}(\varphi)$, wie folgt:

(i) $\mathrm{var}(s_1 \doteq s_2) :\equiv \mathrm{fr}(s_1 \doteq s_2) :\equiv \mathrm{var}(s_1) \cup \mathrm{var}(s_2)$;

(ii) $\mathrm{var}(\dot{R}_i s(0) \dots s(t(i)-1)) :\equiv \mathrm{fr}(\dot{R}_i s(0) \dots s(t(i)-1)) :\equiv \bigcup_{j<t(i)} \mathrm{var}(s(j))$;

(iii) $\mathrm{var}(\dot{(}\varphi\dot{\wedge}\psi\dot{)}) :\equiv \mathrm{var}(\varphi) \cup \mathrm{var}(\psi)$ und $\mathrm{fr}(\dot{(}\varphi\dot{\wedge}\psi\dot{)}) :\equiv \mathrm{fr}(\varphi) \cup \mathrm{fr}(\psi)$;

(iv) $\mathrm{var}(\dot{\neg}\varphi) :\equiv \mathrm{var}(\varphi)$ und $\mathrm{fr}(\dot{\neg}\varphi) :\equiv \mathrm{fr}(\varphi)$;

(v) $\mathrm{var}(\dot{\forall}\dot{v}_n\varphi) :\equiv \mathrm{var}(\varphi) \cup \{\dot{v}_n\}$ und $\mathrm{fr}(\dot{\forall}\dot{v}_n\varphi) :\equiv \mathrm{fr}(\varphi) \setminus \{\dot{v}_n\}$.

Ist $\Phi \subseteq \mathrm{Fml}(L)$, so sei $\mathrm{fr}(\Phi) :\equiv \bigcup\{\mathrm{fr}(\varphi) \mid \varphi \in \Phi\}$ die Menge der freien Variablen von Φ.

Bemerkung 9.21 Die Menge $\mathrm{fr}(\varphi)$ besteht gerade aus denjenigen Variablen aus $\mathrm{var}(\varphi)$, die an mindestens einer Stelle von φ nicht „im Wirkungsbereich" eines Quantors stehen.

Manchmal ist es sinnvoll, sich auf bestimmte freie Variablen zu beschränken. Wir definieren deshalb:

Definition 9.22 Für $n < \omega$ sei $\mathrm{Fml}_n(L) :\equiv \{\varphi \in \mathrm{Fml}(L) \mid \mathrm{fr}(\varphi) \subseteq \{\dot{v}_i \mid i < n\}\}$. Dann ist $\mathrm{Fml}_0(L)$ die Menge aller Formeln, die keine freien Variablen haben, und heißt Menge der **L-Sätze**.

Wir vereinbaren, daß wir zukünftig statt der Variablen $\dot{v}_n$ auch die Buchstaben $x, y, z \dots$ (auch mit Indizes) schreiben werden. Die Schreibweise $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ bedeutet, dass $\varphi \in \mathrm{Fml}(L)$ ist mit $\mathrm{fr}(\varphi) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$.

9.5 Die Kardinalität einer Sprache.

Definition 9.23 Sei $L = (I, J, K, t)$ eine Sprache. Die Kardinalzahl $\overline{\overline{L}} :\equiv \overline{\overline{I \cup J \cup K}} + \aleph_0$ heißt die **Kardinalität der Sprache** L.

Bemerkung 9.24 In der obigen Definition von $\overline{\overline{L}}$ wird $\aleph_0$ addiert, weil wir abzählbar viele Variablen haben, und diese als zur Sprache gehörend angesehen werden.

Lemma 9.25 *Sei L eine Sprache. Dann ist $\overline{\overline{L}} = \overline{\overline{\mathrm{Fml}(L)}}$.*

Beweis. Wegen $\mathrm{Fml}(L) \subseteq A_L^*$ folgt $\overline{\overline{\mathrm{Fml}(L)}} \leq \overline{\overline{A_L^*}} = \overline{\overline{A_L}} + \aleph_0 = \overline{\overline{L}}$. Da andererseits für jedes $i \in I$ und $j \in J$ sowie $k \in K$ und $n < \omega$ gilt $\dot{R}_i \dot{v}_0 \ldots \dot{v}_0 \in \mathrm{Fml}(L)$ und $\dot{f}_j \dot{v}_0 \ldots \dot{v}_0 \doteq \dot{f}_j \dot{v}_0 \ldots \dot{v}_0 \in \mathrm{Fml}(L)$ sowie $\dot{c}_k = \dot{c}_k \in \mathrm{Fml}(L)$ und $\dot{v}_n \doteq \dot{v}_n \in \mathrm{Fml}(L)$, ergibt sich $\overline{\overline{L}} \leq \overline{\overline{\mathrm{Fml}(L)}}$. QED

Wir lassen im folgenden die Punkte über den Symbolbezeichnungen fort und schreiben $(,), \wedge, \forall, v_n, \ldots$ statt $\dot{(}, \dot{)}, \dot{\wedge}, \dot{\forall}, \dot{v}_n, \ldots$.

9.6 Die fehlenden Junktoren und Quantoren.

Wir führen die folgenden Junktoren und Quantoren als Abkürzungen für gewisse Zeichenreihen der Sprache der Logik erster Stufe ein. Mit ihrer Hilfe lassen sich viele Formeln einfacher schreiben.

Definition 9.26 Seien $\varphi, \psi \in \mathrm{Fml}(L)$. Wir setzen:
(a) $(\varphi \vee \psi) :\equiv \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ (**oder**).
(b) $(\varphi \rightarrow \psi) :\equiv (\neg\varphi \vee \psi)$ (**Implikation**).
(c) $(\varphi \leftrightarrow \psi) :\equiv ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi))$ (**Äquivalenz, Biimplikation**).
(d) $\exists v_n \varphi :\equiv \neg\forall v_n \neg\varphi$ (**Existenzquantor**).

Folgende Abkürzungen sind ebenfalls sehr nützlich:

Definition 9.27 (a) Sei $n < \omega$ und seien $x_1, \ldots, x_n \in \{v_i \,|\, i < \omega\}$ und $Q_1, \ldots, Q_n \in \{\forall, \exists\}$. Ferner sei $\varphi \in \mathrm{Fml}(L)$. Wir definieren rekursiv $Q_n x_n \ldots Q_1 x_1 \varphi \in \mathrm{Fml}(L)$ durch $Q_0 x_0 \ldots Q_1 x_1 \varphi :\equiv \varphi$ und
$Q_{n+1} x_{n+1} \ldots Q_1 x_1 \varphi :\equiv Q_{n+1} x_{n+1} Q_n x_n \ldots Q_1 x_1 \varphi$.
(b) Sei $n < \omega$ und für $i < n$ sei $\varphi_i \in \mathrm{Fml}(L)$. Wir definieren rekursiv $\bigwedge_{i<n} \varphi_i$ bzw. $\bigvee_{i<n} \varphi_i$ durch
$\bigwedge_{i<0} \varphi_i :\equiv \forall v_0\, v_0 = v_0$ bzw. $\bigvee_{i<0} \varphi_i :\equiv \neg\forall v_0\, v_0 = v_0$,
$\bigwedge_{i<1} \varphi_i :\equiv \bigvee_{i<1} \varphi_i :\equiv \varphi_0$,
$\bigwedge_{i<n+1} \varphi_i :\equiv (\bigwedge_{i<n} \varphi_i \wedge \varphi_n)$ bzw. $\bigvee_{i<n+1} \varphi_i :\equiv (\bigvee_{i<n} \varphi_i \vee \varphi_n)$, falls $n \geq 1$.

10 Modelle.

Wir fixieren eine formale Sprache $L = (I, J, K, t)$. Die Intention dieser Sprache ist die Beschreibung von *Strukturen*, in denen die Relations-, Funktions- und Konstantensymbole des Alphabets A_L durch entsprechende Relationen, Funktionen und Konstanten interpretiert sind. Wir wenden uns damit der *Semantik* der formalen Sprache zu, d.h. ihrer Interpretation. Wir formalisieren zunächst den Begriff einer mathematischen Struktur.

10.1 Strukturen.

Definition 10.1 Eine $L-$**Struktur** ist ein 4-Tupel

$$\mathfrak{A} = (A, (R_i|i \in I), (f_j|j \in J), (c_k|k \in K)),$$

wobei folgendes gilt.

(i) A ist eine nicht-leere Menge; sie heißt **Trägermenge** oder auch **Universum** von $\mathfrak{A}$. Wir setzen $|\mathfrak{A}| :\equiv A$.

(ii) $\forall i \in I\ R_i \subseteq A^{t(i)}$. Das heißt, R_i ist eine $t(i)$**-stellige Relation** auf A.

(iii) $\forall j \in J\ f_j \colon A^{t(j)} \to A$. Das heißt, f_j ist eine $t(j)$**-stellige Funktion** auf A.

(iv) $\forall k \in K\ c_k \in A$. Das heißt, c_k ist eine **Konstante** aus A.

Die **Kardinalität** der Struktur $\mathfrak{A}$ ist $\overline{\overline{\mathfrak{A}}} :\equiv \overline{\overline{A}}$.

Definition 10.2 Sei $\mathfrak{A}$ eine L-Struktur mit $L = (I, J, K, t)$.

(a) Die Struktur $\mathfrak{A}$ heißt **Algebra**, falls $I = \emptyset$ gilt.

(b) Die Struktur $\mathfrak{A}$ heißt **relationale Struktur**, falls $J = \emptyset$ gilt.

Eine Algebra besitzt also keine Relationen, eine relationale Struktur keine Funktionen.

Beispiel 10.3 Die Struktur der reellen Zahlen kann folgendermaßen als L-Struktur mit $L = (\{0\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{(0, 2), (1, 2), (2, 2)\})$ beschrieben werden:

$$(\mathbb{R}, \{(0, <_{\mathbb{R}})\}, \{(1, +_{\mathbb{R}}), (2, \cdot_{\mathbb{R}})\}, \{(3, 0), (4, 1)\})$$

wobei wir $I :\equiv \{0\}$, $J :\equiv \{1, 2\}$ und $K :\equiv \{3, 4\}$ gewählt haben.

Wir definieren einige wohlbekannte Beziehungen zwischen Strukturen in unserem Formalismus. Sei $L = (I, J, K, t)$ eine Sprache und seien

$$\mathfrak{A} = (A, (R_i|i \in I), (f_j|j \in J), (c_k|k \in K)) \text{ und}$$

$$\mathfrak{A}' = (A', (R'_i|i \in I), (f'_j|j \in J), (c'_k|k \in K))$$

L-Strukturen.

Definition 10.4 Die Struktur $\mathfrak{A}$ ist eine **Substruktur** von $\mathfrak{A}'$ (bzw. $\mathfrak{A}'$ eine **Oberstruktur** von $\mathfrak{A}$), falls gilt:

(i) $A \subseteq A'$;
(ii) $\forall\, i \in I\ R_i = R'_i \cap A^{t(i)}$;
(iii) $\forall\, j \in J\ f_j = f'_j \upharpoonright A^{t(j)}$;
(iv) $\forall\, k \in K\ c_k = c'_k$.

In diesem Fall schreiben wir $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}'$. Da die Substruktur $\mathfrak{A}$ durch $\mathfrak{A}$ und ihre Trägermenge A eindeutig festgelegt ist, können wir auch definieren: $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}' \upharpoonright A$.

Definition 10.5 Eine Funktion $h\colon A \to A'$ heißt **Homomorphismus** von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{A}'$, falls folgendes gilt:

(i) $\forall\, i \in I\, \forall \vec{x} \in A^{t(i)}\ (R_i\vec{x} \longrightarrow R'_i h(\vec{x}))$;
(ii) $\forall\, j \in J\, \forall \vec{x} \in A^{t(j)}\ h(f_j(\vec{x})) = f'_j(h(\vec{x}))$, d.h., das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} A & \times & \cdots & \times & A & \stackrel{f_j}{\to} & A \\ \downarrow h & & \cdots & & \downarrow h & & \downarrow h \\ A' & \times & \cdots & \times & A' & \stackrel{f'_j}{\to} & A' \end{array}$$

kommutiert;
(iii) $\forall\, k \in K\ h(c_k) = c'_k$.

Wir schreiben in diesem Fall $h\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'$.

Beachten Sie, daß wir in obiger Definition nur fordern, daß in der Urbildstruktur bestehende Relationen bewahrt werden müssen; nicht bestehende Relationen müssen nicht unbedingt bewahrt werden. D.h., gilt $R_i\vec{x}$ so gilt auch $R'_i h(\vec{x})$; wenn $R_i\vec{x}$ *nicht* gilt, so kann aber durchaus $R'_i h(\vec{x})$ gelten.

Definition 10.6 Eine Funktion h heißt **Einbettung** von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{A}'$, falls folgende Aussagen gelten:

(i) $h\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'$;
(ii) h ist injektiv;
(iii) $\forall\, i \in I\, \forall \vec{x} \in A^{t(i)}\ (R_i\vec{x} \longleftrightarrow R'_i h(\vec{x}))$.

In diesem Fall schreiben wir $h\colon \mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{A}'$.

Definition 10.7 Eine Funktion h heißt **Isomorphismus** von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{A}'$, falls folgende Aussagen gelten:

(i) $h\colon \mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{A}'$;
(ii) h ist bijektiv.

In diesem Fall schreiben wir $h\colon \mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}'$ und sagen, $\mathfrak{A}$ ist **isomorph** zu $\mathfrak{A}'$. Die Schreibweise $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}'$ bedeute, daß es einen Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{A}'$ gibt.

Läßt sich eine Struktur $\mathfrak{A}$ in eine Struktur $\mathfrak{A}'$ einbetten, so kann man $\mathfrak{A}$ als Substruktur von $\mathfrak{A}'$ auffassen. Genauer gilt:

Satz 10.8 *Es gelte $h: \mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{A}'$. Dann ist $A'' :\equiv \operatorname{ran}(h)$ Träger einer Substruktur $\mathfrak{A}''$ von $\mathfrak{A}'$, und es gilt $h: \mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}''$.*

BEWEIS. Für $i \in I$ sei $R_i'' :\equiv R_i' \cap (A'')^{t(i)}$. Sei $j \in J$. Für $\vec{y} = h(\vec{x}) \in (A'')^{t(j)}$ (mit $\vec{x} \in A^{t(j)}$) ist $f_j'(\vec{y}) = f_j'(h(\vec{x})) = h(f_j(\vec{x})) \in A''$, so daß $f_j'' :\equiv f_j' \restriction (A'')^{t(j)}$ eine Funktion $(A'')^{t(j)} \to A''$ definiert. Da außerdem $c_k' = h(c_k) \in A''$ für $k \in K$ gilt, ist durch $\mathfrak{A}'' :\equiv (A'', (R_i''|i \in I), (f_j''|j \in J), (c_k'|k \in K), t)$ eine Struktur definiert. Aus den Definitionen folgt sofort, daß $\mathfrak{A}''$ eine Substruktur von $\mathfrak{A}'$ ist. Man verifiziert nun leicht, daß $h: \mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}''$ gilt. QED

10.2 Die Modellbeziehung.

Wenn $\mathfrak{A}$ eine im folgenden festgehaltene L-Struktur ist, so ist damit festgelegt, wie die Relations-, Funktions- und Konstantensymbole in $\mathfrak{A}$ interpretiert werden. Wenn zusätzlich festgelegt ist, wie die Variablen in $\mathfrak{A}$ interpretiert werden, können alle L-Terme und L-Formeln in $\mathfrak{A}$ interpretiert werden. Diese Interpretation stellt das fundamentale Bindeglied zwischen Syntax und Semantik dar.

Definition 10.9 Wir definieren: β ist eine **Belegung in** $\mathfrak{A}$ $:\equiv \beta: \{v_n \mid n < \omega\} \to A$.

Wir fixieren nun eine beliebige Belegung β in $\mathfrak{A}$.

Definition 10.10 Sei $s \in \operatorname{Tm}(L)$ ein beliebiger Term. Definiere rekursiv die **Interpretation von** s **in** $\mathfrak{A}$ **unter der Belegung** β, $s^{\mathfrak{A}}[\beta]$, wie folgt:

(i) $v_n^{\mathfrak{A}}[\beta] :\equiv \beta(v_n)$;

(ii) $c_k^{\mathfrak{A}}[\beta] :\equiv c_k$.

(iii) $(f_j s(0) \ldots s(t(j)-1))^{\mathfrak{A}}[\beta] :\equiv f_j(s(0)^{\mathfrak{A}}[\beta], \ldots, s(t(j)-1)^{\mathfrak{A}}[\beta])$.

Ein Term wird also in $\mathfrak{A}$ derart interpretiert, daß jedes Funktions- bzw. Konstantensymbol durch die korrespondierende Funktion bzw. Konstante von $\mathfrak{A}$ ersetzt und jede Variable mit dem durch β bestimmten Element von A (also $\beta(v_n)$ für die Variable v_n) belegt wird. Um zu definieren, wie eine Formel φ in einer Struktur $\mathfrak{A}$ interpretiert wird, müssen wir modifizierte Belegungen einführen.

Definition 10.11 Sei β eine Belegung in $\mathfrak{A}$, $a \in A$ und $n < \omega$. Dann sei $\beta\frac{a}{v_n}$ die durch

$$\beta\frac{a}{v_n}(v_m) :\equiv \begin{cases} \beta(v_m), & \text{falls } m \neq n \\ a, & \text{falls } m = n, \end{cases}$$

definierte Belegung in $\mathfrak{A}$.

Die Belegung $\beta\frac{a}{v_n}$ unterscheidet sich also von β nur dadurch, dass die Variable v_n durch a belegt wird.

Definition 10.12 Sei $\varphi \in \mathrm{Fml}(L)$ eine beliebige L-Formel. Definiere rekursiv die Eigenschaft $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$ wie folgt:

(i) $\mathfrak{A} \models s_1 = s_2[\beta] \quad :\equiv \quad s_1^{\mathfrak{A}}[\beta] = s_2^{\mathfrak{A}}[\beta]$;

(ii) $\mathfrak{A} \models R_i s(0) \ldots s(t(i)-1)[\beta] \quad :\equiv \quad R_i(s(0)^{\mathfrak{A}}[\beta], \ldots, s(t(i)-1)^{\mathfrak{A}}[\beta])$;

(iii) $\mathfrak{A} \models (\varphi_1 \wedge \varphi_2)[\beta] \quad :\equiv \quad (\mathfrak{A} \models \varphi_1[\beta] \ \wedge \ \mathfrak{A} \models \varphi_2[\beta])$;

(iv) $\mathfrak{A} \models \neg\varphi[\beta] \quad :\equiv \quad \neg\,\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$;

(v) $\mathfrak{A} \models \forall v_n \varphi[\beta] \quad :\equiv \quad \forall a \in A\ \mathfrak{A} \models \varphi[\beta\frac{a}{v_n}]$.

Wir sagen dann: $\mathfrak{A}$ **erfüllt** φ **unter** β oder φ **gilt in** $\mathfrak{A}$ **unter** β oder $\mathfrak{A}$ ist ein **Modell von** φ **unter** β.

Nach der obigen Formalisierung ist $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$ eine $\in$-Formel mit den Parametern $\mathfrak{A}$, φ und β. Die Relation $\models$ bezeichnet man als **Modellbeziehung**.

Beispiel 10.13 Betrachte $\mathfrak{A} = (\mathbb{R}, \emptyset, (+_{\mathbb{R}}|i<1), 0, \{(0,2)\})$ und $\varphi :\equiv \forall v_0 \ + v_0 v_1 = v_0)$. Es gilt φ in $\mathfrak{A}$ bei einer Belegung β genau dann, wenn gilt $\forall a \in \mathbb{R}\ a + \beta(v_1) = a$. (Dies ist natürlich genau dann der Fall, wenn $\beta(\dot{v}_1) = 0$.

Wir verallgemeinern die Modellbeziehung auf Formelmengen.

Definition 10.14 Sei $\Phi \subseteq \mathrm{Fml}(L)$ und β eine Belegung in $\mathfrak{A}$. Definiere: $\mathfrak{A} \models \Phi[\beta] \quad :\equiv \forall \varphi \in \Phi\ \mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$.

Satz 10.15 *(a) Ob $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$ gilt oder nicht, hängt nur ab von den endlich vielen Werten $\beta \upharpoonright \mathrm{fr}(\varphi)$ sowie den endlich vielen Relationen $\{R_i \mid i \in I \wedge \dot{R}_i \in \mathrm{ran}(\varphi)\}$, den endlich vielen Funktionen $\{f_j \mid j \in J \wedge \dot{f}_j \in \mathrm{ran}(\varphi)\}$ und den endlich vielen Konstanten $\{c_k \mid k \in K \wedge \dot{c}_k \in \mathrm{ran}(\varphi)\}$.*

(b) Ist φ ein L-Satz, so hängt die Gültigkeit von $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$ nicht von β ab.

Bemerkung 10.16 Das letzte Lemma rechtfertigt die folgenden Schreibweisen:

(a) Sei $s \in \mathrm{Tm}(L)$ und $\mathrm{var}(s) \subseteq \{v_0, \ldots, v_{n-1}\}$. Ist dann $a_i = \beta(\dot{v}_i)$ für $i < n$, so schreiben wir $s^{\mathfrak{A}}[a_0, \ldots, a_{n-1}]$ statt $s^{\mathfrak{A}}[\beta]$.

(b) Sei $\varphi \in \mathrm{Fml}_n(L)$ bzw. $\Phi \subseteq \mathrm{Fml}_n(L)$. Ist dann $a_i = \beta(\dot{v}_i)$ für $i < n$, so schreiben wir $\mathfrak{A} \models \varphi[a_0, \ldots, a_{n-1}]$ statt $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$ bzw. $\mathfrak{A} \models \Phi[a_0, \ldots, a_{n-1}]$ statt $\mathfrak{A} \models \Phi[\beta]$.

(c) Im Fall eines Satzes φ schreiben wir $\mathfrak{A} \models \varphi$ statt $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$ und sagen, $\mathfrak{A}$ **ist ein Modell von** φ. Im Fall einer Menge Φ von L-Sätzen schreiben wir $\mathfrak{A} \models \Phi$ statt $\mathfrak{A} \models \Phi[\beta]$ und sagen, $\mathfrak{A}$ **ist ein Modell von** Φ.

10.3 Die Folgerungsbeziehung und Erfüllbarkeit.

Die logischen Begriffe der Folgerung, der Tautologie und der Widerspruchsfreiheit lassen sich nun mit Hilfe der eingeführten Semantik definieren:

Definition 10.17 Sei $\Phi \subseteq \mathrm{Fml}(L)$ und $\varphi \in \mathrm{Fml}(L)$. Wir definieren:

$\Phi \models \varphi \;:\equiv\; \forall \mathfrak{A}\,\forall \beta\,((\mathfrak{A}$ ist L-Struktur $\wedge\, \beta$ ist Belegung in $\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{A} \models \Phi[\beta]) \longrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi[\beta])$.

Gilt $\Phi \models \varphi$, so sagen wir Φ **impliziert** φ oder auch φ **folgt aus** Φ.

Definition 10.18 Für $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathrm{Fml}(L)$ definiere: $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \varphi \;:\equiv\; \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \varphi$.

Definition 10.19 Für $\varphi, \psi \in \mathrm{Fml}(L)$ definiere: φ, ψ sind **äquivalent** $:\equiv (\varphi \models \psi \wedge \psi \models \varphi)$.

Eine Eigenschaft ist eine Tautologie oder allgemeingültig, wenn sie stets zutrifft:

Definition 10.20 Für $\varphi \in \mathrm{Fml}(L)$ definiere: φ ist **allgemeingültig** $:\equiv\; \models \varphi \;:\equiv\; \emptyset \models \varphi$.

Definition 10.21 Sei $\Phi \subseteq \mathrm{Fml}(L)$. Wir definieren:
Φ ist **erfüllbar** $:\equiv\; \mathrm{Erf}(\Phi) \;:\equiv\; \exists \mathfrak{A}\,\exists \beta\,(\mathfrak{A}$ ist L-Struktur $\wedge\; \beta$ ist Belegung in $\mathfrak{A} \;\wedge\; \mathfrak{A} \models \Phi[\beta])$.

Definition 10.22 Sei $\Phi \subseteq \mathrm{Fml}(L)$. Wir definieren: Φ ist **widerspruchsfrei** $:\equiv \neg\Phi \models \dot{\neg} \dot{v}_0 \doteq \dot{v}_0$.

Lemma 10.23 *Es gilt:* $\Phi \models \varphi \;\longleftrightarrow\; \neg\, \mathrm{Erf}(\Phi \cup \{\dot{\neg}\varphi\})$. *Speziell:* $\models \varphi \;\longleftrightarrow\; \neg\, \mathrm{Erf}(\dot{\neg}\varphi)$.

Beweis. zu„$\Rightarrow$“. Es gelte $\Phi \models \varphi$. Angenommen, $\Phi \cup \{\dot{\neg}\varphi\}$ hat ein Modell $\mathfrak{A}$ unter einer Belegung β. Dann gilt $\mathfrak{A} \models \dot{\neg}\,\varphi[\beta]$, also $\neg\,\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$. Außerdem gilt $\mathfrak{A} \models \Phi[\beta]$, was wegen $\Phi \models \varphi$ auf $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$ führt. Also gilt $(\mathfrak{A} \models \varphi[\beta] \;\wedge\; \neg\,\mathfrak{A} \models \varphi[\beta])$, ein Widerspruch. Die Menge $\Phi \cup \{\dot{\neg}\varphi\}$ kann also nicht erfüllbar sein.
zu „$\Leftarrow$“. Es gelte $\neg\,\Phi \models \varphi$. Dann existiert eine L-Struktur $\mathfrak{A}$ und eine Belegung β in $\mathfrak{A}$, so daß $\mathfrak{A} \models \Phi[\beta]$ und $\neg\,\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$ gelten. Letzteres ist gleichwertig mit $\mathfrak{A} \models \dot{\neg}\,\varphi[\beta]$, also $\mathfrak{A} \models \Phi \cup \{\dot{\neg}\varphi\}[\beta]$, d.h., $\mathrm{Erf}(\Phi \cup \{\dot{\neg}\varphi\})$.
Damit ist das Lemma bewiesen. QED

Hieraus lässt sich bei Wahl von $\varphi = \dot{\neg}\dot{v}_0 \doteq \dot{v}_0$ sofort folgern:

Satz 10.24 Φ *ist widerspruchsfrei, gdw.* Φ *erfüllbar ist.*

In der mathematischen Logik wird gezeigt, dass die hier eingeführten Begriffe zwischen syntaktischen Entitäten auch auf rein syntaktischem Weg definiert werden können: Man führt einen *Ableitungskalkül* ein, der syntaktisch auf L-Formeln operiert. Man definiert $\Phi \vdash \varphi$, falls sich φ im Ableitungskalkül aus Φ erzeugen lässt. Eine Formelmenge Φ ist *konsistent*, falls sich das *Falsum* $\neg v_0 = v_1$ nicht aus Φ ableiten lässt. Im Gödelschen Vollständigkeitssatz, der als Fundamentalsatz der mathematischen Logik aufgefasst werden kann, wird bewiesen, dass die Relationen $\models$ und $\vdash$ übereinstimmen. Daraus folgt, dass eine Theorie erfüllbar ist, gdw. sie syntaktisch konsistent ist.

10.4 Theorien, Modellklassen und Axiomensysteme.

In vielen Bereichen der Mathematik untersucht man Strukturen mit gewissen gemeinsamen Grundeigenschaften. Man untersucht etwa alle linearen Ordnungen oder alle Gruppen oder alle Körper usw. Es handelt sich jeweils um die Analyse der Modellklasse einer gewissen Theorie:

Definition 10.25 Jede erfüllbare Menge $\Phi \subseteq \mathrm{Fml}_0(L)$ heißt (L-)**Theorie**.

Im Hinblick auf das Gödelsche Resultat über die *relative Konsistenz* von **ZFC** zu **ZF** machen wir mit Hilfe der eingeführten Semantik folgende Definition:

Definition 10.26 Seien Φ und Ψ Theorien. Dann ist Φ **relativ konsistent** bezüglich Ψ, falls die Erfüllbarkeit von Ψ die Erfüllbarkeit von Φ impliziert.

Uns interessieren in der axiomatischen Mengenlehre besonders die Theorien **ZF** und **ZFC**. Diese lassen sich innerhalb der Theorie **ZF** selbst formalisieren.

10.5 Eine Formalisierung von ZF in ZF.

Wir betrachten (in V) die Sprache $L(\dot\in) :\equiv (\{0\}, \emptyset, \emptyset, \{(0,2)\})$, die genau ein zweistelliges Relationssymbol $\dot R_0$ besitzt, das wir mit $\dot\in$ bezeichnen. Wir setzen $\mathrm{Fml}(\dot\in) :\equiv \mathrm{Fml}(L(\dot\in))$. Zur Festlegung einer $L(\dot\in)$-Struktur genügen Trägermenge und die Interpretation des zweistelligen Relationssymbols, wir sprechen hier auch von $\dot\in$-Strukturen. Wir bezeichnen $\dot\in$-Strukturen vereinfachend mit $M = (M, E)$, ohne zwischen Struktur und Träger zu unterscheiden; dabei ist E die Interpretation von $\dot\in$. Ein wichtiger Spezialfall ist dadurch gegeben, dass E die Einschränkung der $\in$-Relation auf M ist:

Definition 10.27 Unter einer $\in$-Struktur (ohne Punkt!) verstehen wir Strukturen der Form $M = (M, \in\restriction M)$. Wir schreiben hierfür auch kurz $M = (M, \in)$.

Lemma 10.28 *Es gilt* **ZF** $\vdash \mathrm{Fml}(\dot\in) \subseteq V_\omega$.

BEWEIS. Es ist $A_{L(\dot\in)} \subseteq \omega \times \omega$. Jede Formel $\varphi \in \mathrm{Fml}(\dot\in) = A^*_{L(\dot\in)}$ ist also von der Form

$$\varphi = \{(i, (k_i, l_i)) \mid i < n\}$$

mit $n, k_i, l_i \in \omega$. Dann ist $\mathrm{rg}((i,(k_i, r_i))) \in \omega$ und $\mathrm{rg}(\varphi) = \mathrm{lub}\{\mathrm{rg}((i,(k_i,r_i))) \mid i < n\} < \omega$. Also ist $\mathrm{Fml}(L(\dot\in)) \subseteq V_\omega$. QED

Wir ordnen nun jeder $\in$-Formel φ eine Menge $\ulcorner\varphi\urcorner \in \mathrm{Fml}(\dot\in)$ zu.

Definition 10.29 Sei φ eine $\in$-Formel. Wir definieren die **GÖDEL-Menge** $\ulcorner\varphi\urcorner$ von φ durch Rekursion über den Aufbau von φ:

(i) $\ulcorner v_i = v_j \urcorner :\equiv \dot v_i \doteq \dot v_j$;

(ii) $\ulcorner v_i \in v_j \urcorner :\equiv \dot v_i \dot\in \dot v_j$;

(iii) $\ulcorner(\varphi \wedge \psi)\urcorner :\equiv \dot{(}\ulcorner\varphi\urcorner\dot{\wedge}\ulcorner\psi\urcorner\dot{)}$;

(iv) $\ulcorner\neg\varphi\urcorner :\equiv \dot{\neg}\ulcorner\varphi\urcorner$;

(v) $\ulcorner\forall v_i\varphi\urcorner :\equiv \dot{\forall}\dot{v}_i\ulcorner\varphi\urcorner$.

Ist Φ eine konkret vorgegebene, endliche Liste von $\in$-Formeln $\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}$, so definieren wir $\ulcorner\Phi\urcorner :\equiv \{\ulcorner\varphi_0\urcorner, \ldots, \ulcorner\varphi_{n-1}\urcorner\}$.

Bemerkung 10.30 (a) (i) und (ii) in der obigen Definition müßten exakt $\ulcorner v_i = v_j\urcorner :\equiv \dot{v}_{\tilde{\imath}} \doteq \dot{v}_{\tilde{\jmath}}$ und $\ulcorner v_i \in v_j\urcorner :\equiv \dot{v}_{\tilde{\imath}}\dot{\in}\dot{v}_{\tilde{\jmath}}$ lauten, da $\tilde{n}$ die Formalisierung der metasprachlichen natürlichen Zahl n in V ist.[16]

(b) Ist φ eine $\in$-Formel, so ist $\ulcorner\varphi\urcorner$ ein Klassenterm der Form

$$\{(\tilde{0}, (\tilde{\imath_0}, \tilde{\jmath_0})), \ldots, (\widetilde{n-1}, (\widetilde{\imath_{n-1}}, \widetilde{\jmath_{n-1}}))\},$$

wobei n und i_k, j_k für $k < n$ konkret gegebene (metasprachliche) natürliche Zahlen sind. Dies beweist man leicht durch eine (metasprachliche!) Rekursion über den Aufbau von φ, wenn man (a) sowie die Definitionen von $\dot{v}_k$ sowie $\dot{(}$ und $\dot{)}$ sowie $\dot{\neg}$ und $\dot{\wedge}$ und $\dot{\forall}$ beachtet. Es ist $\mathrm{rg}(\ulcorner\psi\urcorner) = \tilde{l}$ mit $l = \max_{k=0,\ldots,n-1} \max\{k, i_k+2, j_k+2\} + 2$.

(c) Wir fassen die Junktoren $\vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ und den Quantor $\exists$ in der üblichen Weise als Abkürzungen auf und erhalten:
$\ulcorner(\varphi \vee \psi)\urcorner = \dot{(}\ulcorner\varphi\urcorner\dot{\vee}\ulcorner\psi\urcorner\dot{)}$,
$\ulcorner(\varphi \rightarrow \psi)\urcorner = \dot{(}\ulcorner\varphi\urcorner\dot{\rightarrow}\ulcorner\psi\urcorner\dot{)}$,
$\ulcorner(\varphi \leftrightarrow \psi)\urcorner = \dot{(}\ulcorner\varphi\urcorner\dot{\leftrightarrow}\ulcorner\psi\urcorner\dot{)}$,
$\ulcorner\exists v_i\varphi\urcorner = \dot{\exists}\dot{v}_i\ulcorner\varphi\urcorner$.

(d) Wir können nicht argumentieren, daß jedes $\sigma \in \mathrm{Fml}(L(\dot{\in}))$ von der Form $\sigma = \ulcorner\varphi\urcorner$ mit einer $\in$-Formel φ ist. Existiert z.B. ein $n \in \omega$, das nicht von der Form $\tilde{n}$ ist, so gibt es keine $\in$-Formel φ mit $\ulcorner\varphi\urcorner = \dot{v}_n \doteq \dot{v}_n$.

Mit Hilfe der GÖDEL-Mengen können wir **ZF** in **ZF** formalisieren.

Definition 10.31 Wir definieren:

$$\begin{aligned}
\ulcorner\mathbf{ZF}\urcorner :\equiv & \Big\{\ulcorner(\mathbf{Ex})\urcorner, \ulcorner(\mathbf{Ext})\urcorner, \ulcorner(\mathbf{Paar})\urcorner, \ulcorner(\textstyle\bigcup\text{-}\mathbf{Ax})\urcorner, \ulcorner(\mathbf{Pot})\urcorner, \ulcorner(\mathbf{Inf})\urcorner\Big\} \cup \\
& \Big\{\dot{\forall}\dot{v}_1 \ldots \dot{\forall}\dot{v}_n\dot{\forall}\dot{v}_{n+1}\dot{\exists}\dot{v}_{n+2}\dot{\forall}\dot{v}_0\dot{(}\dot{v}_0\dot{\in}\dot{v}_{n+2}\dot{\leftrightarrow}\dot{(}\dot{v}_0\dot{\in}\dot{v}_{n+1}\,\dot{\wedge}\,\varphi\dot{)}\dot{)} \;\Big|\; n < \omega \,\wedge\, \varphi \in \mathrm{Fml}_{n+1}(L(\dot{\in}))\Big\} \cup \\
& \Big\{\dot{\forall}\dot{v}_2 \ldots \dot{\forall}\dot{v}_{n+1}\dot{(}\dot{\forall}\dot{v}_0\dot{\forall}\dot{v}_{n+2}\dot{\forall}\dot{v}_{n+3}\dot{(}\dot{(}\varphi\frac{\dot{v}_{n+2}}{\dot{v}_1}\,\dot{\wedge}\,\varphi\frac{\dot{v}_{n+3}}{\dot{v}_1}\dot{)} \dot{\rightarrow} \dot{v}_{n+2} \doteq \dot{v}_{n+3}\dot{)} \\
& \qquad \dot{\longrightarrow} \dot{\forall}\dot{v}_{n+2}\dot{\exists}\dot{v}_{n+3}\dot{\forall}\dot{v}_1\dot{(}\dot{v}_1\dot{\in}\dot{v}_{n+3}\dot{\leftrightarrow}\dot{\exists}\dot{v}_0\dot{(}\dot{v}_0\dot{\in}\dot{v}_{n+2}\,\dot{\wedge}\,\varphi\dot{)}\dot{)}\dot{)} \;\Big| \\
& \qquad n < \omega \,\wedge\, \varphi \in \mathrm{Fml}_{n+2}(L(\dot{\in}))\,\dot{\wedge}\,\{\dot{v}_{n+2}, \dot{v}_{n+3}\} \cap \mathrm{var}(\varphi) = \emptyset\Big\} \cup \\
& \Big\{\dot{\forall}\dot{v}_1 \ldots \dot{\forall}\dot{v}_n\dot{(}\dot{\exists}\dot{v}_0\varphi \dot{\rightarrow} \dot{\exists}\dot{v}_0\dot{(}\varphi\,\dot{\wedge}\,\dot{\forall}\dot{v}_{n+1}\dot{(}\dot{v}_{n+1}\dot{\in}\dot{v}_0\dot{\rightarrow}\dot{\neg}\,\varphi\frac{\dot{v}_{n+1}}{\dot{v}_0}\dot{)}\dot{)}\dot{)} \;\Big| \\
& \qquad n < \omega \,\wedge\, \varphi \in \mathrm{Fml}_{n+1}(L(\dot{\in})) \,\wedge\, \dot{v}_{n+1} \notin \mathrm{var}(\varphi)\Big\}.
\end{aligned}$$

[16]zu $\tilde{n}$ siehe **??**.

Es ergibt sich sofort:

Lemma 10.32 *Ist φ ein* **ZF***-Axiom, so gilt* $\mathbf{ZF} \vdash \ulcorner\varphi\urcorner \in \ulcorner\mathbf{ZF}\urcorner$*. Ferner gilt* $\mathbf{ZF} \vdash \ulcorner\mathbf{ZF}\urcorner \subseteq \mathrm{Fml}_0(L(\dot{\in}))$.

11 Relativierungen von Formeln.

Wir setzen in diesem Kapitel – sofern nichts anderes gesagt wird – nur **EML** voraus.
Der Satz von Gödel über die relative Konsistenz des Auswahlaxioms wird durch Angabe einer uniformen Methode bewiesen, mit der sich jedes Modell von **ZF** in ein Modell von **ZFC** transformieren lässt. Wir definieren dafür Submodelle von Modellen für die Sprache der Mengenlehre: der Träger des Submodells wird durch eine $\in$-Formel innerhalb des äußeren Modells definiert, die $\in$-Relation es Submodells ist die Einschränkung der äußeren $\in$-Relation auf diesen Träger. Dieses Verfahren erinnert an gewisse Konstruktionen von Modellen der *nicht-euklidischen* Geometrie als Submodelle von Modellen der *euklidischen* Geometrie. Die Submodell-Bildung wird durch *Relativierungen* von Formeln und Termen auf Terme realisiert.

11.1 Die Relativierung einer $\in$-Formel auf einen $\in$-Term.

Definition 11.1 Sei W ein $\in$-Term und φ eine $\in$-Formel, so daß W und φ keine Variablen gemeinsam haben. Wir definieren die **Relativierung von φ auf W**, φ^W, durch Rekursion über den Formelaufbau durch

(i) $(v_i \in v_j)^W :\equiv v_i \in v_j$;
(ii) $(v_i = v_j)^W :\equiv v_i = v_j$;
(iii) $(\neg\varphi)^W :\equiv \neg(\varphi)^W$;
(iv) $(\varphi \wedge \psi)^W :\equiv (\varphi^W \wedge \psi^W)$;
(v) $(\forall v_i \varphi)^W :\equiv \forall v_i(v_i \in W \to \varphi^W)$.

Die $\in$-Formel φ^W entsteht also aus φ, indem der Laufbereich jedes Quantors in φ auf den $\in$-Term W beschränkt wird. Hieraus folgt durch Induktion über den Aufbau von φ:

Satz 11.2 *Sei $\varphi(v_0, \ldots, v_{n-1})$ eine $\in$-Formel und die Variable x komme in φ nicht vor. Dann gilt:*

$$x \neq \emptyset \longrightarrow \forall v_0, \ldots, v_{n-1} \in x\ (\varphi^x(v_0, \ldots, v_{n-1}) \leftrightarrow (x, \in) \models \ulcorner\varphi\urcorner[v_0, \ldots, v_{n-1}]).$$

Die Gültigkeit einer auf den $\in$-Term W relativierten Formel φ^W kann angesichts dieses Satzes als Gültigkeit der Formel φ in dem „Modell“ $(W, \in)$ interpretiert werden. Daher schreiben wir auch $(W, \in) \models \varphi$ statt φ^W.
Um mit der Methode der inneren Modelle Aussagen über relative Konsistenzen zu erhalten, benötigen wir noch:

Satz 11.3 *Sei $M = (M, E)$ eine $\dot{\in}$-Struktur. Sei $W = \{x|\chi\}$ ein Klassenterm ohne freie Variable. Definiere die Interpretation von W in M als $W^M = \{x|(M,E) \models \chi\}$ und sei N die $\dot{\in}$-Struktur $N = (W^M, E \restriction W^M)$. Für $\varphi \in L(\dot{\in})$ definiere die Relativierung φ^W rekursiv wie in 11.1. Dann gilt für alle $\varphi \in L(\dot{\in})$ und Belegungen β in N: $M \models \varphi^W[\beta]$ gdw. $N \models \varphi$.*

11.2 Relativierungen der ZFC-Axiome.

Wir untersuchen, wann **ZFC**-Axiome in Strukturen $(W, \in)$ gelten. Hierbei interessieren vor allem *transitive* Klassenterme W.

Satz 11.4 *Es gelte* **ZF**. *Sei W ein transitiver Klassenterm, $W \neq \emptyset$. Dann gilt:*

(a) $(\mathbf{Ex})^W$.

(b) $(\mathbf{Ext})^W$.

(c) $(\mathbf{Paar})^W \longleftrightarrow \forall a \in W \, \forall b \in W \; \{a, b\} \in W$.

(d) $(\bigcup\text{-}\mathbf{Ax})^W \longleftrightarrow \forall a \in W \; \bigcup a \in W$.

(e) *Sei ψ die für die $\in$-Formel $\varphi(x, \vec{w})$ gebildete Instanz von* **(Aus)**. *Dann gilt:*
$\psi^W \longleftrightarrow \forall \vec{w} \in W \, \forall a \in W \; \{x \in a \mid \varphi^W(x, \vec{w})\} \in W$.

(f) $(\mathbf{Pot})^W \longleftrightarrow \forall a \in W \; \mathcal{P}(a) \cap W \in W$.

(g) $(\mathbf{Inf})^W \longleftrightarrow \exists a \in W \; (\emptyset \in a \wedge \forall x \in a \; x + 1 \in a)$.
Speziell: $\omega \in W \longrightarrow (\mathbf{Inf})^W$ *und* $((\mathbf{Inf})^W \wedge (\mathbf{Aus})^W) \longrightarrow \omega \in W$.

(h) $(\mathbf{Ers})^W$ *gilt genau dann, wenn für jede $\in$-Formel $\varphi(x, y, \vec{w})$ gilt:*
$$\forall \vec{w} \in W \Big(\forall x, y, y' \in W \; ((\varphi^W(x, y, \vec{w}) \wedge \varphi^W(x, y', \vec{w})) \to y = y') \\ \longrightarrow \forall a \in W \; \{y \mid \exists x \in a \; \varphi^W(x, y, \vec{w})\} \cap W \in W \Big).$$

(i) *Es gilt* $(\mathbf{Fund})^W$. *Genauer: Ist ψ eine Instanz von* **(Fund)**, *so gilt ψ^W.*

(j) $(\mathbf{AC})^W \longleftrightarrow \forall a \in W \Big((\emptyset \notin a \wedge \forall x, y \in a \; (x \neq y \to x \cap y = \emptyset)) \longrightarrow \exists b \in W \, \forall x \in a \, \exists z \; b \cap x = \{z\} \Big)$.

Beweis. Wir notieren zunächst

(1) Sei $x \in W$ und seien φ und ψ $\in$-Formeln. Dann gilt:
   (a) $x \cap W = x$.
   (b) $\forall y \, ((y \in x \wedge \varphi) \to \psi) \longleftrightarrow \forall y \in W \; ((y \in x \wedge \varphi) \to \psi)$.
   (c) $\exists y \, (y \in x \wedge \varphi) \longleftrightarrow \exists y \in W \; (y \in x \wedge \varphi)$

Beweis. Da W transitiv ist, folgt $x \subseteq W$ aus $x \in W$, und dies impliziert (a). Da nach (a) $y \in x$ gleichwertig ist mit $y \in W \wedge y \in x$ ergeben sich (b) und (c). qed(1)

Wir beweisen nun die einzelnen Punkte des Satzes.

zu (a). Es gilt: $(\mathbf{Ex})^W \longleftrightarrow \exists x \in W \, \forall y \in W \; y \notin x$. Da W transitiv ist, gilt $\forall y \in W \, y \notin x \longleftrightarrow \forall y \, y \notin x$ für jedes $x \in W$, beachte (1a). Hier ist die rechte Teilformel gleichwertig mit $x = \emptyset$, so daß wir $(\mathbf{Ex})^W \longleftrightarrow \exists x \in W\ x = \emptyset$ haben. Um (a) zu beweisen, ist somit $\emptyset \in W$ zu zeigen. Hierzu verifizieren wir:

(2) Es gilt: $x \neq \emptyset \longrightarrow \emptyset \in \mathrm{TC}(x)$.[17]

Beweis. Wir führen eine $\in$-Induktion durch, siehe **??**. Sei $x \in V$ und die Behauptung für die Elemente von x bewiesen. Ist $x = \emptyset$, so ist nichts zu beweisen. Ist $x \neq \emptyset$, so sei $y \in x$ beliebig. Ist $y = \emptyset$, so ist (2) gezeigt; ist $y \neq \emptyset$, so gilt nach Induktionsvoraussetzung $\emptyset \in \mathrm{TC}(y)$, und weil $\mathrm{TC}(y) \subseteq \mathrm{TC}(x)$ gilt, folgt hieraus die Behauptung. qed(2)

Da $W \neq \emptyset$ gilt, existiert $x \in W$. Ist $x = \emptyset$, so sind wir fertig; ist $x \neq \emptyset$, so ist nach (2) $\emptyset \in \mathrm{TC}(x)$. Da W transitiv ist, folgt $\mathrm{TC}(x) \subseteq W$ und somit $\emptyset \in W$. Damit ist (a) bewiesen.

zu (b). Es gilt: $(\mathbf{Ext})^W \longleftrightarrow \forall a, b \in W\ (a = b \leftrightarrow \forall x \in W\ (x \in a \leftrightarrow x \in b))$. Aus (1b) folgt, daß für $a, b \in W$ gilt $\forall x \in W\ (x \in a \leftrightarrow x \in b) \longleftrightarrow \forall x\ (x \in a \leftrightarrow x \in b)$. Hier ist die rechte Teilformel gleichwertig mit $a \subseteq b \wedge b \subseteq a$. Also gilt: $(\mathbf{Ext})^W \longleftrightarrow \forall a, b \in W\ (a = b \leftrightarrow (a \subseteq b \wedge b \subseteq a))$. Da **ZF** gilt, ist dies (nach **(Ext)**) erfüllt. Damit ist (b) bewiesen.

zu (c). Es gilt: $(\mathbf{Paar})^W \longleftrightarrow \forall a, b \in W\, \exists c \in W\, \forall x \in W\ (x \in c \leftrightarrow (x = a \vee x = b))$. Aus (1b) folgt, daß für alle $a, b, c \in W$ gilt: $\forall x \in W\ (x \in c \leftrightarrow (x = a \vee x = b)) \longleftrightarrow \forall x\ (x \in c \leftrightarrow (x = a \vee x = b))$. Die rechte Teilformel ist gleichwertig mit $c = \{a, b\}$. Also gilt $(\mathbf{Paar})^W \longleftrightarrow \forall a, b \in W\ \{a, b\} \in W$. Damit ist (c) bewiesen.

zu (d). Es gilt: $(\bigcup\text{-}\mathbf{Ax})^W \longleftrightarrow \forall a \in W\, \exists b \in W\, \forall x \in W\ (x \in b \leftrightarrow \exists y \in W (y \in a \wedge x \in y))$. Mit (1) folgt wieder leicht, daß $\forall x \in W\ (x \in b \leftrightarrow \exists y \in W (y \in a \wedge x \in y)) \longleftrightarrow \forall x (x \in b \leftrightarrow \exists y\, (y \in a \wedge x \in y))$ für alle $a, b \in W$ gilt. Hier ist die rechte Teilformel mit $b = \bigcup a$ gleichwertig, so daß sich die Gültigkeit von $(\bigcup\text{-}\mathbf{Ax})^W \longleftrightarrow \forall a \in W\, \exists b \in W\ b = \bigcup a$ ergibt, wie in (d) behauptet.

zu (e). Sei ψ die mit $\varphi(x, \vec{w})$ gebildete Instanz von **(Aus)**. Dann gilt

$$\psi \longleftrightarrow \forall \vec{w}\, \forall a\, \exists b\, \forall x\, (x \in b \leftrightarrow (x \in a \wedge \varphi(x, \vec{w}))).$$

Es ergibt sich

$$\psi^W \longleftrightarrow \forall \vec{w} \in W\, \forall a \in W\, \exists b \in W\ \underbrace{\forall x \in W\ (x \in b \leftrightarrow (x \in a \wedge \varphi^W(x, \vec{w})))}_{\overset{(1b)}{\longleftrightarrow} \forall x\, (x \in b \leftrightarrow (x \in a \wedge \varphi^W))}.$$

Da $\forall x (x \in b \leftrightarrow \psi)$ gerade $b = \{x \mid \psi\}$ bedeutet, folgt hieraus (e).

zu (f). Es gilt

$$(\mathbf{Pot})^W \longleftrightarrow \forall a \in W\, \exists b \in W\, \forall x \in W\, (x \in b \leftrightarrow \forall y \in W\, (y \in x \rightarrow y \in a)).$$

Wegen (1b) ist dies gleichwertig mit $\forall a \in W\, \exists b \in W\, \forall x \in W\, (x \in b \leftrightarrow \forall y\, (y \in x \rightarrow y \in a))$. Wegen $\forall x \in W\, (x \in b \leftrightarrow \forall y\, (y \in x \rightarrow y \in a)) \longleftrightarrow b = \mathcal{P}(a) \cap W$ folgt $(\mathbf{Pot})^W \longleftrightarrow \forall a \in W\ \mathcal{P}(a) \cap W \in W$. Dies war zu zeigen.

[17] $\mathrm{TC}(x)$ ist die kleinste transitive Obermenge von x, vgl. **??**.

zu (g). $(\mathbf{Inf})^W$ ist äquivalent zu

$$\exists a \in W \Big(\exists x \in W \, (x \in a \wedge \forall y \in W \, y \notin x) \wedge \\ \forall x \in W \, (x \in a \rightarrow \exists y \in W \, (y \in a \wedge \forall z \in W \, (z \in y \leftrightarrow (z = x \vee z \in x)))) \Big).$$

Aus (1c) und den Überlegungen zu $(\mathbf{Ex})^W$ folgt, daß für $a \in W$ gilt

$$\exists x \in W \, (x \in a \wedge \forall y \in W \, y \notin x) \longleftrightarrow \exists x \, (x \in a \wedge x = \emptyset);$$

Durch mehrfaches Anwenden von (1b) und (1c) folgt für $a \in W$

$$\forall x \in W \, (x \in a \rightarrow \exists y \in W \, (y \in a \wedge \forall z \in W \, (z \in y \leftrightarrow (z = x \vee z \in x)))) \\ \longleftrightarrow \forall x (x \in a \rightarrow \exists y (y \in a \wedge \forall z (z \in y \leftrightarrow (z = x \vee z \in x)))).$$

(Behandle zunächst $\forall z$, danach $\exists y$ und schließlich $\forall x$.) Dieses ist gleichwertig mit $\forall x \in a \, x{+}1 \in a$, so daß wir $(\mathbf{Inf})^W \longleftrightarrow \exists a \in W \, (\emptyset \in a \wedge \forall x \in a \, x{+}1 \in a)$ haben. Hieraus folgt sofort $\omega \in W \longrightarrow (\mathbf{Inf})^W$. Gelte nun $(\mathbf{Inf})^W$ und $(\mathbf{Aus})^W$. Wähle $a \in W$ mit $\emptyset \in a$, so daß a unter der $+1$-Bildung abgeschlossen ist. Sei $s(x) :\equiv \exists y \in x \forall z \in x \, (z \in y \vee z = y)$ eine $\in$-Formel, die aussagt, daß x ein Nachfolger ist. Wegen $s(x)^W \longleftrightarrow \exists y \in x \cap W \, \forall z \in x \cap W \, (z \in y \vee z = y)$ und (1a) gilt $s(x)^W \leftrightarrow s(x)$ für alle $x \in W$. Sei $\psi(x) :\equiv s(x) \wedge \forall y \in x \; s(y)$. Dann gilt $\omega = \{n \,|\, \psi(n)\} = \{n \in a \,|\, \psi(n)\}$, vgl. 4.15. Da aus (1a) und $s^W \leftrightarrow s$ folgt, daß $\psi(x)^W \leftrightarrow \psi(x)$ für $x \in W$ gilt, ergibt sich $\omega = \{n \in a \,|\, \psi^W(n)\} \in W$ nach $(\mathbf{Aus})^W$. Damit ist (g) bewiesen.

zu (h). Sei $\varphi(x, y, \vec{x})$ eine $\in$-Formel und ψ die mit φ gebildete Instanz von **(Ers)**. Es ist zu zeigen, daß ψ^W äquivalent zu der in (h) angegebenen $\in$-Formel ist. Es ist

$$\psi^W \longleftrightarrow \forall \vec{w} \in W \Big(\forall x, y, y' \in W \, ((\varphi^W(x, y, \vec{w}) \wedge \varphi^W(x, y', \vec{w})) \rightarrow y = y') \\ \longrightarrow \forall a \in W \, \exists b \in W \, \underbrace{\forall y \in W \, (y \in b \leftrightarrow \exists x \in \underbrace{a \cap W}_{\overset{(1a)}{=} a} \varphi^W(x, y, \vec{w}))}_{\longleftrightarrow b = \{y \,|\, \exists x \in a \; \varphi^W(x,y,\vec{w})\} \cap W} \Big).$$

Dies war zu zeigen.

zu (i). Sei ψ die mit der $\in$-Formel $\varphi(x, \vec{w})$ gebildete Instanz von **(Fund)**, d.h.,

$$\psi \longleftrightarrow \forall \vec{w} \Big(\exists x \varphi(x, \vec{w}) \longrightarrow \exists x (\varphi(x, \vec{w}) \wedge \forall y \in x \, \neg \varphi(y, \vec{w})) \Big).$$

Sei ψ_0 die mit der $\in$-Formel $x \in W \wedge \vec{w} \in W \wedge \varphi^W(x, \vec{w})$ gebildete Instanz von **(Fund)**. Dann gilt

$$\psi_0 \longleftrightarrow \forall \vec{w} \in W \Big(\exists x \in W \; \varphi^W(x, \vec{w}) \\ \longrightarrow \exists x \in W \, (\varphi^W(x, \vec{w}) \wedge \forall y \in x \, \underbrace{\neg(y \in W \wedge \vec{w} \in W \wedge \varphi^W(y, \vec{w}))}_{\leftrightarrow \neg \varphi^W \text{ da } y \in x \subseteq W \text{ und } \vec{w} \in W}) \Big),$$

wie man leicht sieht. Mit Hilfe von (1b) folgt, daß dies äquivalent zu ψ^W ist. Da ψ_0 gilt, gilt somit auch ψ^W. Damit ist (i) gezeigt.
zu (j). $(\mathbf{AC})^W$ ist äquivalent mit

$$\begin{aligned}\forall a \in W\, \exists b \in W\, \Big(& (\forall x \in W\ (x \in a \to \exists y \in W\ y \in x) \wedge \\ & \quad \forall x \in W\, \forall y \in W((x \in a \wedge y \in a \wedge x \neq y) \to \neg \exists z \in W\ (z \in x \wedge z \in y))) \\ & \longrightarrow \forall x \in W\ (x \in a \to \exists y \in W\ (y \in x \wedge y \in b \wedge \\ & \qquad\qquad \forall z \in W\ ((z \in x \wedge z \in b) \to z = y)))\Big).\end{aligned}$$

Durch mehrfaches Anwenden von (1b) und (1c) folgt analog zur Vorgehensweise bei der Analyse von $(\mathbf{Inf})^W$, daß dies äquivalent ist zu

$$\begin{aligned}\forall a \in W\, \exists b \in W\ \Big(& (\forall x\, (x \in a \to \exists y\, y \in x) \wedge \forall x \forall y((x \in a \wedge y \in a \wedge x \neq y) \to \neg \exists z\, (z \in x \wedge z \in y) \\ & \longrightarrow \forall x(x \in a \to \exists y(y \in x \wedge y \in b \wedge \forall z\, ((z \in x \wedge z \in b) \to z = y)))\Big).\end{aligned}$$

Dies ist äquivalent zu der in (j) angegebenen $\in$-Formel. Also gilt (j).
Damit ist der Satz bewiesen. QED

Wir betrachten als Beispiel die VON NEUMANNsche Hierarchie.

Satz 11.5 *Es gelte* **ZFC**. *Sei* $\alpha \in \mathrm{On}$, $\alpha > 0$.
(a) Es gelten $(\mathbf{Ex})^{V_\alpha}$, $(\mathbf{Ext})^{V_\alpha}$, $(\bigcup\text{-}\mathbf{Ax})^{V_\alpha}$, $(\mathbf{Aus})^{V_\alpha}$, $(\mathbf{Fund})^{V_\alpha}$ *und* $(\mathbf{AC})^{V_\alpha}$.
(b) Ist $\alpha > \omega$, *so gilt* $(\mathbf{Inf})^{V_\alpha}$.
(c) Gilt $\mathrm{Lim}(\alpha)$, *so gelten* $(\mathbf{Paar})^{V_\alpha}$ *und* $(\mathbf{Pot})^{V_\alpha}$.

BEWEIS. Da V_α transitiv ist, folgt aus 11.4 sofort die Gültigkeit von $(\mathbf{Ex})^{V_\alpha}$, $(\mathbf{Ext})^{V_\alpha}$ und $(\mathbf{Fund})^{V_\alpha}$. Um $(\bigcup\text{-}\mathbf{Ax})^{V_\alpha}$ zu zeigen, fixieren wir $a \in V_\alpha$ beliebig. Ist $y \in \bigcup a$, so existiert ein $x \in a$ mit $y \in x$; also ist $\mathrm{rg}(y) < \mathrm{rg}(x) < \mathrm{rg}(a)$. Damit folgt

$$\mathrm{rg}(\bigcup a) = \sup\{\underbrace{\mathrm{rg}(y) + 1}_{\leq \mathrm{rg}(a)} \mid y \in \bigcup a\} \leq \mathrm{rg}(a) < \alpha.$$

Somit gilt $\bigcup a \in V_\alpha$, und dies war zu zeigen. Die Gültigkeit von $(\mathbf{Aus})^{V_\alpha}$ ergibt sich so: Sei $a \in V_\alpha$ und seien $\vec{w} \in V_\alpha$, ferner sei $\varphi(x, \vec{w})$ eine $\in$-Formel. Da $\{x \in a \mid \varphi^{V_\alpha}(x, \vec{w})\} \subseteq a$ gilt, folgt

$$\mathrm{rg}\Big(\{x \in a \mid \varphi^{V_\alpha}(x, \vec{w})\}\Big) \leq \mathrm{rg}(a) < \alpha,$$

also $\{x \in a \mid \varphi^{V_\alpha}(x, \vec{w})\} \in V_\alpha$. Dies war zu zeigen.
Um die Gültigkeit von $(\mathbf{AC})^{V_\alpha}$ zu beweisen, betrachte eine Menge $a \in V_\alpha$ von nichtleeren, disjunkten Mengen. Wegen **(AC)** existiert ein $b \in V$, das mit jedem Element von a genau ein Element gemeinsam hat. Um aus b alle „überflüssigen“ Elemente zu entfernen

(also jene, die nicht zu einem Element von a gehören), setzen wir $b' :\equiv \bigcup\{x \cap b \mid x \in a\}$. Dann ist b' eine Menge, die mit jedem Element von a genau ein Element gemeinsam hat; überdies gilt $b' \subseteq \bigcup a$. Aus letzterem folgt $\mathrm{rg}(b') \leq \mathrm{rg}(\bigcup a) \leq \mathrm{rg}(a) < \alpha$. Also ist $b' \in V_\alpha$ und $(\mathbf{AC})^{V_\alpha}$ gezeigt.

Ist $\alpha > \omega$, so gilt $\omega \in V_\alpha$ und $(\mathbf{Inf})^{V_\alpha}$ wegen $\omega \in V_{\omega+1} \subseteq V_\alpha$.

Nun gelte $\mathrm{Lim}(\alpha)$. Sind $a, b \in V_\alpha$, so gilt $\mathrm{rg}(a) < \alpha$ und $\mathrm{rg}(b) < \alpha$. Da α ein Limes ist, ist auch $\mathrm{rg}(a)+1 < \alpha$ und $\mathrm{rg}(b)+1 < \alpha$, so daß sich $\mathrm{rg}(\{a,b\}) = \max\{\mathrm{rg}(a)+1, \mathrm{rg}(b)+1\} < \alpha$ ergibt. Somit ist $\{a,b\} \in V_\alpha$, d.h., es gilt $(\mathbf{Paar})^{V_\alpha}$. Des weiteren ist

$$\mathrm{rg}(\mathcal{P}(a) \cap V_\alpha) \leq \mathrm{rg}(\{x \mid x \subseteq a\}) = \sup\{\underbrace{\mathrm{rg}(x)}_{\leq \mathrm{rg}(a)} + 1 \mid x \subseteq a\} \leq \mathrm{rg}(a) + 1 < \alpha,$$

also $\mathcal{P}(a) \cap V_\alpha \in V_\alpha$. Somit gilt $(\mathbf{Pot})^{V_\alpha}$.

QED

11.3 Die Absolutheit von Formeln.

Um das Konzept der elementaren Substruktur[18] auf „Klassenmodelle" von $\in$-Theorien zu übertragen, führen wir den Begriff der „absoluten Formel" ein:

Definition 11.6 Seien W und W' $\in$-Terme und $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ eine $\in$-Formel, die sowohl mit W als auch mit W' keine Variable gemeinsam hat. Die $\in$-Formel φ heißt **W-W'-absolut**, falls gilt

$$\forall x_1 \in W \ \ldots \forall x_n \in W \ (\varphi^W \leftrightarrow \varphi^{W'}).$$

Statt „W-V-absolut" sagen wir kurz **W-absolut**.

Für $W \subseteq W'$ bedeutet die W-W'-Absolutheit einer $\in$-Formel φ, dass bei jeder „Belegung" der freien Variablen von φ mit Parametern $x_1, \ldots . x_n$ aus W gilt

$$(W, \in) \models \varphi(x_1, \ldots, x_n) \iff (W', \in) \models \varphi(x_1, \ldots, x_n).$$

Man kann einen „Absolutheitskalkül" entwickeln, nach dem absolute Formeln aus absoluten Formeln gebildet werden können. Formeln, deren Quantifikationen beschränkt sind, sind absolut.

Lemma 11.7 *Seien W, W' $\in$-Terme und es gelte $W \subseteq W'$ und $W \neq \emptyset$. Dann gilt:*

(a) Atomare Formeln, also Formeln der Gestalt $v_i \in v_j$ bzw. $v_i = v_j$ sind W-W'-absolut.

(b) Wenn φ und ψ W-W'-absolut sind, so auch $\neg\varphi$ und $(\varphi \wedge \psi)$; damit sind dann auch $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ sowie $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ W-W'-absolut.

(c) Sei W transitiv. Ist dann φ W-W'-absolut, so auch $\forall x \in y\ \varphi$; damit ist dann auch $\exists x \in y\ \varphi$ W-W'-absolut.

[18] siehe **??**

BEWEIS. zu (a). Dies ist klar, da $\varphi^W \equiv \varphi^{W'} \equiv \varphi$ gilt.
zu (b). Aus den Voraussetzungen $\forall \vec{x} \in W\ (\varphi^W \leftrightarrow \varphi^{W'})$ sowie $\forall \vec{x} \in W\ (\psi^W \leftrightarrow \psi^{W'})$ folgt

$$\forall \vec{x} \in W \Big(\underbrace{\neg(\varphi^W)}_{\equiv(\neg\varphi)^W} \longleftrightarrow \underbrace{\neg(\varphi^{W'})}_{\equiv(\neg\varphi)^{W'}}\Big) \quad \text{sowie} \quad \forall \vec{x} \in W \Big(\underbrace{(\varphi^W \wedge \psi^W)}_{\equiv(\varphi\wedge\psi)^W} \longleftrightarrow \underbrace{(\varphi^{W'} \wedge \psi^{W'})}_{\equiv(\varphi\wedge\psi)^{W'}}\Big).$$

Dies war zu zeigen.
zu (c). Wir halten zunächst fest:

(1) Ist $y \in W$, so gilt $y \cap W = y \cap W'$.

BEWEIS. Da W transitiv ist, folgt $y \subseteq W$ aus $y \in W$. Also gilt $y = y \cap W \subseteq y \cap W' \subseteq y$. Hieraus folgt die Behauptung. qed(1)

Sei nun $\varphi \equiv \varphi(x, y, \vec{z})$. Seien $y, \vec{z}$ Elemente von W. Dann gilt:

$$\begin{aligned}(\forall x \in y\ \varphi(x,y,\vec{z}))^W &\longleftrightarrow \forall x \in y \cap W\ \varphi(x,y,\vec{z})^W \\ &\longleftrightarrow \forall x \in y \cap W\ \varphi(x,y,\vec{z})^{W'} \text{ (da } \varphi\ W\text{-}W'\text{-absolut)} \\ &\overset{(1)}{\longleftrightarrow} \forall x \in y \cap W'\ \varphi(x,y,\vec{z})^{W'} \\ &\longleftrightarrow (\forall x \in y\ \varphi(x,y,\vec{z}))^{W'}\end{aligned}$$

Also gilt $\forall y, \vec{z} \in W \Big((\forall x \in y\ \varphi(x,y,\vec{z}))^W \longleftrightarrow (\forall x \in y\ \varphi(x,y,\vec{z}))^{W'}\Big)$. QED

Das Lemma zeigt, daß für Absolutheitsbetrachtungen solche $\in$-Formeln eine herausragende Rolle spielen, deren Quantoren auf Mengen beschränkt sind.

Definition 11.8 Eine $\in$-Formel φ heißt **Σ_0-Formel**, falls sie von einer der folgenden Formen ist:

(i) φ ist atomar, also von der Form $v_i \in v_j$ oder $v_i = v_j$;
(ii) $\varphi \equiv \neg\psi$, wobei ψ eine Σ_0-Formel ist;
(iii) $\varphi \equiv (\psi \wedge \chi)$, wobei ψ und χ Σ_0-Formeln sind;
(iv) $\varphi \equiv \forall x(x \in y \to \psi)$, wobei ψ eine Σ_0-Formel ist.

Aus 11.7 folgt sofort:

Satz 11.9 *Seien W und W' $\in$-Terme, so daß $W \neq \emptyset$ und $W \subseteq W'$ gilt und W transitiv ist. Dann ist jede Σ_0-Formel, die weder mit W noch mit W' eine Variable gemeinsam hat, W-W'-absolut.*

12 Relative Konsistenzbeweise.

12.1 Die Methode der inneren Modelle.

Definition 12.1 Ein Klassenterm W heißt **inneres Modell** von **ZF**, falls $W \neq \emptyset$, W transitiv ist und φ^W für jedes **ZF**-Axiom φ gilt.

Innere Modelle lassen sich für relative Konsistenzbeweise nutzen:

Satz 12.2 *Es gelte* **ZF**. *Sei W ein inneres Modell von* **ZF** *und φ ein $\in$-Satz mit* $\mathbf{ZF} \models \varphi^W$. *Dann ist* $\mathbf{ZF} + \varphi$ *relativ konsistent zu* **ZF**.

Beweis. Sei $M = (M, E)$ ein Modell von **ZF**. Sei N das Submodell $N = (W^M, E \restriction W^M)$. Nach 11.3 gilt für alle Sätze χ:

$$N \models \chi \text{ gdw. } M \models \chi^W.$$

Nach Voraussetzung gilt die rechte Seite für alle $\chi \in \mathbf{ZF} + \varphi$, und N ist ein Modell von $\mathbf{ZF} + \varphi$. QED

Bemerkung 12.3 Unter Verwendung von 12.2 kann man relative Konsistenzbeweise mit Hilfe der **Methode der inneren Modelle** wie folgt führen. Sei φ ein $\in$-Satz und es sei die (relative) Konsistenz von $\mathbf{ZF} + \varphi$ zu zeigen. Hierzu konstruiere man einen unter der Voraussetzung **ZF** nicht-leeren, transitiven Klassenterm W mit $(\mathbf{ZF} + \varphi)^W$. Wir werden dieses Verfahren in 13.9 auf $\varphi \equiv (\mathbf{AC})$ anwenden.

Wir formulieren ein Kriterium dafür, dass ein vorgelegter Klassenterm W ein inneres Modell ist.

Definition 12.4 (a) Ein Klassenterm W heißt **fast-universell**, falls $\forall x(x \subseteq W \longrightarrow \exists y \in W \; x \subseteq y)$ gilt.

(b) Ein Klassenterm W heißt **Aussonderungs-abgeschlossen**, falls $\forall a, \vec{y} \in W \; \{x \mid x \in a \wedge \varphi^W(x, \vec{y})\} \in W$ für jede $\in$-Formel $\varphi(x, \vec{y})$ gilt.

Bemerkung 12.5 Nach Satz 11.4 ist die zweite Eigenschaft äquivalent dazu, dass in W das Aussonderungsschema **(Aus)** gilt.

Satz 12.6 *Gelte* **ZF**. *Der Klassenterm W sei transitiv, fast-universell und Aussonderungs-abgeschlossen. Dann ist W ein inneres Modell.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist W transitiv. Da W fast-universell und $\emptyset \subseteq W$ ist, existiert ein $y \in W$ (mit $\emptyset \subseteq y$). Also ist $W \neq \emptyset$.
Aus der Transitivität von W und $W \neq \emptyset$ folgen nach 11.4 $(\mathbf{Ex})^W$, $(\mathbf{Ext})^W$ und $(\mathbf{Fund})^W$.
zu $(\mathbf{Paar})^W$. Seien $a, b \in W$. Da $\{a, b\} \subseteq W$ und W fast-universell ist, existiert ein $z \in W$ mit $z \supseteq \{a, b\}$. Dann gilt

$$\{a, b\} = \{x \in z \mid x = a \vee x = b\} = \{x \in z \mid (x = a \vee x = b)^W\}.$$

Da W Aussonderungs-abgeschlossen ist, folgt hieraus $\{a, b\} \in W$, und nach 11.4 $(\mathbf{Paar})^W$.
zu $(\bigcup\textbf{-Ax})^W$. Sei $a \in W$. Da W transitiv ist, ist dann $\bigcup a \subseteq W$, so daß wegen der fast-Universalität von W ein $z \in W$ existiert mit $z \supseteq \bigcup a$. Somit ist

$$\bigcup a = \{y \in z \mid \exists x \in a \; y \in x\} = \{y \in z \mid (\exists x \in a \; y \in x)^W\}.$$

$\bigcup a \in W$ folgt aus der Aussonderungs-Abgeschlossenheit von W. Nach 11.4 gilt $(\bigcup\textbf{-Ax})^W$.
zu $(\mathbf{Aus})^W$. Dieses Schema folgt direkt aus der Definition von Aussonderungs-abgeschlossen und der Bemerkung12.5.
zu $(\mathbf{Pot})^W$. Sei $a \in W$. Dann ist $\mathcal{P}(a) \cap W \in V$ und $\mathcal{P}(a) \cap W \subseteq W$. Da W fast-universell ist, existiert ein $z \in W$ mit $\mathcal{P}(a) \cap W \subseteq z$, und es gilt

$$\mathcal{P}(a) \cap W = \{x \in z \,|\, \forall y \in x \; y \in a\} = \{x \in z \,|\, (\forall y \in x \; y \in a)^W\}.$$

Da W Aussonderungs-abgeschlossen ist, ist die Menge auf der rechten Seite in W, d.h., $\mathcal{P}(a) \cap W \in W$. Nach 11.4 gilt $(\mathbf{Pot})^W$.
zu $(\mathbf{Inf})^W$. Wir zeigen, dass $\mathrm{On} \subseteq W$; hieraus folgt $\omega \in W$ und $(\mathbf{Inf})^W$. Wenn $\mathrm{On} \not\subseteq W$ ist, so ist $\alpha :\equiv \mathrm{On} \cap W \in \mathrm{On}$, da W transitiv ist. Da $\alpha \subseteq W$ und W fast-universell ist, existiert ein $z \in W$ mit $\alpha \subseteq z$. Aus der Definition von α folgt $\alpha = z \cap \mathrm{On}$. Da die Formeln $\mathrm{Trans}(x)$ und $\mathrm{SLO}(x)$ äquivalent zu Σ_0-Formeln sind und daher W-absolut sind, ist:

$$\alpha = \{x \in z \,|\, x \in \mathrm{On}\} = \{x \in z \,|\, \mathrm{Trans}(x) \wedge \mathrm{SLO}(x)\} = \{x \in z \,|\, (\mathrm{Trans}(x) \wedge \mathrm{SLO}(x))^W\}$$

Da W Aussonderungs-abgeschlossen ist, ist die Menge auf der rechten Seite in W. Also ist $\alpha \in W$. Nach Wahl von α ist aber $\alpha \notin \mathrm{On} \cap W$. Widerspruch.
zu $(\mathbf{Ers})^W$. Sei $\varphi(x, y, \vec{w})$ eine $\in$-Formel. Seien $a, \vec{w} \in W$ und es gelte

$$\forall x, y, y'((\varphi^W(x, y, \vec{w}) \;\wedge\; \varphi^W(x, y', \vec{w})) \longrightarrow y = y')$$

Wende $(\mathbf{Ers})$ an auf die Formel $y \in W \;\wedge\; \varphi^W(x, y, \vec{w})$; dann ist

$$b :\equiv \{y \mid \exists x\, (x \in a \;\wedge\; (y \in W \;\wedge\; \varphi^W(x, y, \vec{w})))\} \in V.$$

Wegen $b \subseteq W$ existiert ein $z \in W$ mit $z \supseteq b$. Aufgrund von $(\mathbf{Aus})^W$ gilt dann (siehe 11.4)

$$b = \{y \in z \mid \exists x\, (x \in a \;\wedge\; (y \in W \;\wedge\; \varphi^W(x, y, \vec{w})))\} \in W.$$

Andererseits gilt $b = \{y \in W \mid \exists x \in a \; \varphi^W(x, y, \vec{w})\}$ nach Definition von b. Damit haben wir gezeigt, daß $\{y \in W \mid \exists x \in a \; \varphi^W(x, y, \vec{w})\} \in W$ gilt, so daß wir nach 11.4 $(\mathbf{Ers})^W$ bewiesen haben.
Damit ist $\mathbf{ZF}^W$ bewiesen. QED

12.2 Der Lévysche Reflexionssatz.

Der folgende Satz ist in vielen Konsistenzuntersuchungen wichtig. Er besagt, dass es für die Auswertung einer gegebenen Formel genügt, sich auf ein Anfangsstück des Universums zu beschränken.

Satz 12.7 (Reflexionssatz von Lévy[19]) *Es gelte* $\mathbf{ZF}$. *Sei* $\varphi_0(x_0, \ldots, x_{r-1}), \ldots, \varphi_{n-1}(x_0, \ldots, x_{r-1})$ *eine endliche Liste von $\in$-Formeln und sei $\theta_0 \in \mathrm{On}$. Dann existiert ein $\theta \geq \theta_0$, so daß $\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}$ V_θ-absolut sind.*

[19] Azriel Lévy

und

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{H}\mathcal{S}, \in, A) \models a = f(\{a, b\}) \\
\leftrightarrow\ &(\mathrm{H}\mathcal{S}, \in, A) \models \tilde{\pi}(a) = \tilde{\pi}(f)(\tilde{\pi}(\{a, b\})) \\
\leftrightarrow\ &(\mathrm{H}\mathcal{S}, \in, A) \models b = f(\{a, b\}).
\end{aligned}
$$

Also wäre $a = b$, Widerspruch. QED

Damit ist gezeigt:

Satz 14.9 *Wenn das System* **ZF** *widerspruchsfrei ist, so ist das System* $\mathbf{ZF}_A + \neg(\mathbf{AC})$ *widerspruchsfrei.*

In dem vorgestellten Modell ist es also nicht möglich, aus einer Menge von ungeordneten Paaren auszuwählen. Wir werden diese Konstruktion später im Rahmen der Forcing-Methode nachbilden und dort die Unabhängigkeit von **(AC)** vom ursprünglichen System **ZF** zeigen.

15 Erweiterungen von Modellen der Mengenlehre

Die bisher konstruierten und untersuchten Modelle der Mengenlehre waren *innere Modelle*, d.h. Teilmodelle von Ausgangsmodellen. Aus grundsätzlichen Überlegungen, die wir noch nicht ausführen können, ergibt sich, dass sich viele axiomatische Untersuchungen nicht mit inneren Modellen durchführen lassen. Daher wenden wir uns nun *Erweiterungen* von gegebenen Modellen der Mengenlehre zu. Die hier vorgestellte *Erzwingungs-* oder *Forcing-*Methode stammt von Paul Cohen, der mit ihrer Hilfe die Unabhängigkeit der Cantorschen Kontinuumshypothese und des Auswahlaxioms gezeigt hat.
Wir wollen zu einem gegebenen $\in$-Modell M von **ZFC** eine *generische* Menge G *adjungieren*, so dass das entstehende Modell $M[G]$ wiederum ein Modell von **ZFC** ist. Cohen bewies die Unabhängigkeit der Kontinuumshypothese **CH**, indem er *generische Erweiterungen* $M[G]$ und $M[G']$ konstruierte, sodass

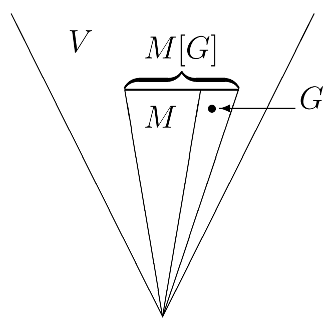
$$M[G] \models \mathbf{ZFC} + \mathbf{CH} \text{ bzw. } M[G'] \models \mathbf{ZFC} + \neg\mathbf{CH}.$$

Der Erweiterungsprozess besitzt einige Analogien zu der Erweiterung $k(a)$ eines Körpers k um ein transzendentes Element a. Bei der algebraischen Konstruktion lassen sich die Elemente b der Erweiterung mit Hilfe von Elementen des Grundkörpers beschreiben: b ist eine gebrochen rationale Funktion von a, wobei die Koeffizienten der Funktion aus dem Grundkörper k stammen. Das Element b lässt sich also durch eine endliche Folge dieser Koeffizienten beschreiben. Diese Folge kann als *Name* des Elements b aufgefasst werden. Jedes Element des Grundkörpers besitzt einen trivialen Namen, nämlich die Einerfolge, die aus diesem Element besteht. Dass $k(a)$ ein Körper ist, beruht darauf, dass die Körperaxiome in der Ausgangsstruktur gelten. Die Erweiterung wird von k und a erzeugt:

jeder Zwischenkörper K mit $k \subseteq K \subseteq k(a)$ und $a \in K$ erfüllt $K = k(a)$. Die mengentheoretische Situation ist allerdings wesentlich komplizierter als die algebraische: während es bis auf Isomorphie nur eine einfache transzendente Erweiterung gibt, werden wir bei der Diskussion der Forcing-Methode eine große Fülle wesentlich verschiedener Erweiterungen kennenlernen.
Wir wollen zunächst eine Konstruktion von Erweiterungen $M[G]$ angeben, die im Allgemeinen nicht alle Axiome der Mengenlehre erfüllen. Diese Konstruktion wird später zu der Cohenschen Methode spezialisiert. Wir arbeiten zur Vereinfachung der Darstellung mit $\in$-Modellen der Mengenlehre. Die Frage, wie wir zu geeigneten *Grundmodellen* kommen können, soll erst später diskutiert werden.

Definition 15.1 Eine $\in$-Struktur $M = (M, \in)$ ist ein **Grundmodell**, wenn es ein abzählbares, transitives Modell von **ZFC** ist, d.h. $\mathbf{ZFC}^M$, $\mathrm{card}(M) = \aleph_0$ und M ist transitiv.

Fixiere bis auf Weiteres ein Grundmodell $M = (M, \in)$. Die gesuchte Erweiterung $(M[G], \in)$ wird durch eine (neue) Menge G festgelegt werden. Die Konstruktion von G erfolgt, indem sukzessiv mehr Information über G festgelegt wird. Dieser „Prozess“ wird durch eine Halbordnung von Approximationen an G kontrolliert. Die Approximationen sind bereits in der Lage, Eigenschaften der endgültigen Erweiterung $M[G]$ zu „bedingen“ oder zu „erzwingen“. Daher definieren wir:



Definition 15.2 Ein Dreitupel $(P, \leq, 1_P)$ heißt **Forcing-Halbordnung** oder **Erzwingungsrelation**, falls gilt:

(i) $(P, \leq)$ ist eine schwache partielle Ordnung;

(ii) 1_P ist größtes Element von $(P, \leq)$.

Die Elemente von P werden auch als **Bedingungen** bezeichnet. Falls $p \leq q$ sagen wir, p **verstärkt** q. Sind $q_1, \ldots, q_n \in P$ und ist $p \leq q_i$ für $i < n$, so sagen wir, p ist eine **gemeinsame Verstärkung** von $q_1, \ldots, q_n$. Falls $q_1, \ldots, q_n \in P$ eine gemeinsame Verstärkung in P besitzen, so heißen $q_1, \ldots, q_n$ **kompatibel**.

Beispiel 15.3 Die **Cohen-Halbordnung** ist auf der Menge

$$P = \mathrm{Fn}(\omega, 2, \omega) = \{f \mid f\colon \mathrm{dom}(f) \to b \wedge \overline{\overline{\mathrm{dom}(f)}} < \omega\}$$

aller endlichen *partiellen* Funktionen von ω nach $\{0, 1\}$ definiert. Sie wird später zur Approximation einer *totalen* Funktion von ω nach $\{0, 1\}$ benutzt, d.h. zur Approximation einer reellen Zahl. Dieses kommt in der Definition der Erzwingungsrelation zum Ausdruck: eine Bedingung ist stärker, wenn sie eine größere partielle Funktion ist. Das größte und zugleich schwächste Element von P ist die leere Funktion. Also definieren wir die Cohen-Halbordnung als $P = (P, \supseteq, \emptyset)$. Zwei Bedingungen in P sind kompatibel, wenn sie als Funktionen kompatibel sind. Das ist der Fall, wenn ihre Vereinigung wiederum eine Funktion ist.

Wir fixieren bis auf Weiteres eine Forcing-Halbordnung$P = (P, \leq, 1_P) \in M$; die Forcing-Halbordnungwird im Grundmodell gewählt, damit die **ZFC**-Eigenschaften von M auf P angewendet werden können. Die scheinbar verkehrte Definition des Begriffs „Verstärkung“ hängt mit späteren technischen Aspekten zusammen. Die intendierte Konstruktion entspricht einer sukzessiven Wahl von Bedingungen, die sich verstärken:

$$1_p \ldots \geq p \geq q \geq \ldots.$$

Allgemeiner lassen sich derartige Limesprozesse durch *Filter* auf P beschreiben:

Definition 15.4 Sei $P = (P, \leq, 1_P)$ eine Forcing-Halbordnung. Eine Teilmenge $G \subseteq P$ ist ein **Filter** auf P, falls

(i) $1_P \in G$;

(ii) $\forall q \in G\, \forall p \geq q\, p \in G$;

(iii) $\forall p, q \in G\, \exists r \in G\, (p \geq r \wedge q \geq r)$.

Im Fall der Cohen-Halbordnung wäre wegen der Kompatibilitätsbedingung die Vereinigung eines Filters eine partielle Funktion von ω nach $\{0,1\}$. Wir werden später *generische* Filter einführen, bei denen diese Funktion total wäre.
Fixiere bis auf Weiteres einen Filter G auf P. Schon jetzt sind wir in der Lage, ein Erweiterungsmodell $M[G]$ einer schwachen Mengenlehre zu definieren. Zur Motivation der Konstruktion stelle man sich zwei Elemente x, y des angestrebten Modells $M[G]$ vor. Zur Festlegung des Modells ist es jedenfalls nötig, die Relation „$y \in x$“ zu entscheiden. Dieses soll entlang des Filters G erfolgen in dem Sinne, dass es eine Bedingung $p \in G$ gibt, so dass p entscheidet, dass $y \in x$, oder so dass p entscheidet, dass $y \notin x$. Zum Arbeiten mit den noch nicht festgelegten Mengen x und y benötigen wir *Namen* in einer geeigneten Sprache. Wie im Falle der Körper sollen diese Namen Elemente des Grundmodells M sein. Wir finden also *Namen* $\dot{x} \in M$ und $\dot{y} \in M$, deren noch definierende Interpretationen $\dot{x}^G$ und $\dot{y}^G$ im Modell $M[G]$ gleich den vorgelegten Mengen sind:

$$\dot{x}^G = x \text{ und } \dot{y}^G = y.$$

Die Interpretation von $\dot{x}$ soll durch die Klasse der Paare

$$\{(\dot{y}, p) | \, p \text{ „erzwingt“ } \dot{y} \in \dot{x}\}$$

bestimmt sein. Nach der von der Ordinalzahl-Theorie bekannten Methode wollen wir nun im Wesentlichen eine einfache Identifizierung vornehmen:

$$\dot{x} = \{(\dot{y}, p) | \, p \text{ „erzwingt“ } \dot{y} \in \dot{x}\}.$$

Dies motiviert die folgende Interpretationsfunktion:

Definition 15.5 Definiere rekursiv auf M für $\dot{x} \in M$ die **G-Interpretation $\dot{x}^G$ von $\dot{x}$** durch

$$\dot{x}^G :\equiv \{\dot{y}^G \mid \exists p \in G\ (\dot{y}, p) \in \dot{x}\}.$$

Die (generische) Erweiterung ist dann die Gesamtheit dieser Interpretationen:

Definition 15.6 $M[G] :\equiv \{\dot{x}^G \mid \dot{x} \in M\}$ heißt **generische Erweiterung von M durch P und G.**

Die Rekursion in Definition 15.5 erfolgt über die stark fundierte Relation

$$\dot{y}\, R\, \dot{x} :\equiv \exists u\, (\dot{y}, u) \in \dot{x}.$$

15.1 Fundamentale Eigenschaften von $M[G]$.

Satz 15.7 *$M[G]$ ist transitiv.*

BEWEIS. Sei $u \in v \in M[G]$. Dann ist $v = \dot{x}^G$ für ein $\dot{x} \in M$. Aus $u \in \dot{x}^G$ folgt nach Definition von $\dot{x}^G$ die Existenz eines $\dot{y} \in \operatorname{dom}(\dot{x}) \subseteq M$ mit $u = \dot{y}^G$. Folglich ist $u \in M[G]$. QED

Satz 15.8 $\forall \dot{x} \in M\ \operatorname{rg}(\dot{x}^G) \leq \operatorname{rg}(\dot{x})$.

BEWEIS. Wir führen eine R-Induktion durch.

$$\begin{aligned}\operatorname{rg}\Big(\dot{x}^G\Big) &= \operatorname{rg}\Big(\{\dot{y}^G \mid \exists p \in G\ (\dot{y}, p) \in \dot{x}\}\Big) = \operatorname{lub}\{\operatorname{rg}(\dot{y}^G) \mid \underbrace{\exists p \in G\ (\dot{y}, p) \in \dot{x}}_{\Rightarrow \dot{y} R \dot{x}}\} \\ &\leq \operatorname{lub}\{\operatorname{rg}(\dot{y}) \mid \dot{y} R \dot{x}\} \quad \text{(Ind.Vor.)} \\ &< \operatorname{rg}(\dot{x}) \quad (\text{wegen } \dot{y} R \dot{x} \longrightarrow \operatorname{rg}(\dot{y}) < \operatorname{rg}(\dot{x})).\end{aligned}$$

Damit ist der Satz bewiesen. QED

Um $M \subseteq M[G]$ zu zeigen, müssen wir zu jedem $x \in M$ einen M-Namen $\check{x}$ so zuordnen, daß die G-Interpretation von $\check{x}$ gerade x ist.

Definition 15.9 Definiere durch $\in$-Rekursion: $\check{x} :\equiv \{(\check{y}, 1_P) \mid y \in x\}$. Für $x \in M$ heißt $\check{x}$ **kanonischer Name für** x.

Satz 15.10 *Für $x \in M$ gilt $\check{x}^G = x$.*

BEWEIS. Wir führen eine $\in$-Induktion über $x \in M$ durch.

$$\begin{aligned}\check{x}^G &= \{\dot{y}^G \mid \exists p \in G\ (\dot{y}, p) \in x\} = \{\dot{y}^G \mid (\dot{y}, 1_P) \in x\} = \{\check{y}^G \mid y \in x\} = \{y \mid y \in x\} \quad \text{(Ind.Vor.)} \\ &= x.\end{aligned}$$

Damit ist alles gezeigt. QED

Aus 15.10 und **??** ergibt sich sofort:

Corollar 15.11 $M \subseteq M[G]$.

M und $M[G]$ haben dieselbe ordinale Höhe:

Corollar 15.12 $\mathrm{On}^M = \mathrm{On}^{M[G]}$. *M.a.W.:*[20] $M \cap \mathrm{On} = M[G] \cap \mathrm{On}$.

BEWEIS. Es genügt, die zweite Identität zu zeigen
zu $\subseteq$". Dies folgt sofort aus $M \subseteq M[G]$.
zu „$\supseteq$". Sei $\alpha \in M[G] \cap \mathrm{On}$. Wähle ein $x \in M$ mit $\alpha = \dot{x}^G$. Da rg M-V-absolut ist, siehe **??**, gilt $\mathrm{rg}(x) = \mathrm{rg}(x)^M \in M \cap \mathrm{On}$. Wegen 15.8 gilt $\alpha = \mathrm{rg}(\alpha) = \mathrm{rg}(\dot{x}^G) \in \mathrm{rg}(x)$. Da $M \cap \mathrm{On}$ als Schnitt transitiver Terme transitiv ist, folgt $\alpha \in M \cap \mathrm{On}$. QED

Um $G \in M[G]$ zu zeigen, benötigen wir einen Namen für den Filter G. Wir setzen:

Definition 15.13 $\dot{G} :\equiv \{(\check{p}, p) \mid p \in P\}$ heißt **kanonischer Name für Filter über** P.

Lemma 15.14 $\dot{G} \in M$.

BEWEIS. Sei $\varphi(p, y) :\equiv \exists x\, (x = \check{p} \wedge y = (x, p))$. Da der Term $\check{p}$ (**??**) und die Formel $y = (x, p)$ (**??**) M-V-absolut sind, ist nach **??** die Formel $\varphi(p, y)$ ebenfalls M-V-absolut. Ferner verhält sich $\varphi(p, y)$ „funktional":

$$\forall p, y, y' \in M\ ((\varphi(p, y) \wedge \varphi(p, y')) \longrightarrow y = y').$$

Wegen $(\mathbf{Paar})^M$ folgt

$$\begin{aligned} \dot{G} &= \{y \mid \exists p \in P\ y = (\check{p}, p)\} = \{y \in M \mid \exists p \in P\ y = (\check{p}, p)\} = \{y \in M \mid \exists p \in P\ \varphi(p, y)\} \\ &= \{y \in M \mid \exists p \in P\ \varphi^M(p, y)\} \in M \quad \text{(wegen } (\mathbf{Ers})^M\text{)}. \end{aligned}$$

Dies war zu zeigen. QED

Satz 15.15 *Sei H ein Filter auf P. Dann gilt $\dot{G}^H = H$. Insbesondere ist $H \in M[H]$.*

BEWEIS.

$$\begin{aligned} \dot{G}^H &= \{\dot{y}^H \mid \exists p \in H\ (\dot{y}, p) \in \dot{G}\} = \{\dot{y}^H \mid \exists p \in H\ ((\check{p}, p) \in \dot{G} \wedge \dot{y} = \check{p})\} \\ &= \{\dot{y}^H \mid \exists p \in H\ \dot{y} = \check{p}\} = \{\check{p}^H \mid p \in H\} = \{p \mid p \in H\} \quad (15.10) \\ &= H. \end{aligned}$$

Dies war zu zeigen. QED

Satz 15.16 *Es gilt* $(\mathbf{Ex})^{M[G]}$, $(\mathbf{Ext})^{M[G]}$, $(\mathbf{Paar})^{M[G]}$, $(\mathbf{Inf})^{M[G]}$ *und* $(\mathbf{Fund})^{M[G]}$.

[20] siehe **??**

BEWEIS. Da $M[G]$ transitiv und nicht-leer ist, gelten $(\mathbf{Ex})^{M[G]}$, $(\mathbf{Ext})^{M[G]}$ und $(\mathbf{Fund})^{M[G]}$ nach 11.4. Wegen $\omega \in M \subseteq M[G]$ gilt $(\mathbf{Inf})^{M[G]}$. Um $(\mathbf{Paar})^{M[G]}$ zu zeigen fixiere $a, b \in M[G]$. Seien $x, y \in M$ mit $a = \dot{x}^G$ und $b = \dot{y}^G$. Setze $\dot{z} :\equiv \{(\dot{x}, 1_P), (\dot{y}, 1_P)\}$. Dann gilt $\dot{z}^G = \{\dot{x}^G, \dot{y}^G\} = \{a, b\}$. Also ist $\{a, b\} \in M[G]$, d.h., $(\mathbf{Paar})^{M[G]}$ nach 11.4. QED

Satz 15.17 *Es gilt* $(\bigcup\text{-}\mathbf{Ax})^{M[G]}$.

BEWEIS. Sei $x \in M[G]$, $x = \dot{x}^G$. Wir definieren einen Namen für die Vereinigung von x:

$$\dot{y} :\equiv \{(\dot{u}, r) | \exists p, q \in P \exists \dot{v} (r \leq p \wedge r \dot{\leq} q \wedge (\dot{u}, p) \in \dot{v} \wedge (\dot{v}, q) \in \dot{x}\}.$$

Dies ist ein Name, d.h. ein Element von M, weil M unter einfachen Operationen, und insbesondere unter Vereinigungsbildung abgeschlossen ist.
Betrachte $u \in \bigcup x$. Wähle $v \in x$ mit $u \in v \in x = \dot{x}^G$. Wähle $\dot{v} \in M$ und $q \in G$ mit $(\dot{v}, q) \in \dot{x}$ und $\dot{v}^G = v$. Wähle $\dot{u} \in M$ und $p \in G$ mit $(\dot{u}, p) \in \dot{v}$ und $\dot{u}^G = u$. Wähle $r \in G$ mit $r \leq p, q$. Dann ist $(\dot{u}, r) \in \dot{y}$ und da $r \in G$ ist $\dot{u}^G \in \dot{y}^G$. Also ist $u \in \dot{y}^G$.
Umgekehrt betrachte $u \in \dot{y}^G$. Wähle $r \in G$ und $\dot{u} \in M$ mit $(\dot{u}, r) \in \dot{y}$ und $u = \dot{u}^G$. Nach Definition von $\dot{y}$ wähle $p, q \in P$ und $\dot{v} \in M$ mit $r \leq p, q$, $(\dot{u}, p) \in \dot{v}$ und $(\dot{v}, q) \in \dot{x}$. Dann ist $p, q \in G$ und $\dot{u}^G \in \dot{v}^G$, $\dot{v}^G \in \dot{x}^G$. Also ist $u \in \dot{v}^G \in x$ und $u \in \bigcup x$. QED

Mit ähnlichen Methoden ließen sich weitere Abschlusseigenschaften von $M[G]$ zeigen, wie der Abschluss gegenüber cartesischen Produkten. Allerdings machen andere, einfache Operationen wie z.B. der Schnitt zweier Mengen Schwierigkeiten, und wir müssen die stärkeren Techniken des nächsten Kapitels einsetzen.

16 Die Erzwingungsrelation

Der Nachweis der weiteren Axiome der Mengenlehre in $M[G]$ stößt in der augenblicklichen Allgemeinheit auf Schwierigkeiten. Wir wollen unser weiteres Vorgehen anhand des Aussonderungsaxioms, des zentralen Axioms der Zermeloschen Mengenlehre, motivieren. Angenommen, wir wollen das Aussonderungsaxiom in $M[G]$ nachweisen. Man betrachte ein $a \in M[G]$ und eine $\in$-Formel φ. Wie kann man erreichen, dass die Aussonderungsmenge

$$\{u \in a | M[G] \models \varphi(u)\} \in M[G]?$$

Nach dem Vorgehen des vorangehenden Kapitels wähle man einen Namen $\dot{a} \in M$, $\dot{a}^G = a$ und versuche die Bildung eines Names vom Typ:

$$\dot{b} = \{(\dot{u}, r) | (r \leq p \wedge (\dot{u}, p) \in \dot{a} \wedge r \text{ erzwingt, dass } M[G] \models \varphi(\dot{u}^G)\}.$$

Wir müssen erreichen, dass dies ein Name, also ein Element des Grundmodells M ist, aber eine korrekte Definition in M darf nicht Bezug auf ein Element G nehmen, das im allgemeinen kein Element von M ist.

Wir „lösen“ dieses Problem dadurch, dass wir in den Bezug auf G einfach weglassen:

$$\dot{b} = \{(\dot{u}, r) | (r \leq p \wedge (\dot{u}, p) \in \dot{a} \wedge r \text{ erzwingt, dass } \varphi(\dot{u})\}.$$

Eine Bedingung r soll also in der Lage sein, die Richtigkeit von $\varphi(\dot{u})$ in Erweiterungen zu kontrollieren. Dies lässt sich in solcher Allgemeinheit nicht erreichen, aber wir können eine provisorische Definition machen:
„Definition“. r erzwingt $\varphi(\dot{u})$ gdw. für *alle* Filter $G \subseteq P$ mit $r \in G$ gilt:

$$M[G] \models \varphi(\dot{u}).$$

Tatsächlich lassen sich, aus recht trivialen Gründen, bestimmte Aussagen in diesem Sinne „erzwingen“: falls $(\dot{x}, p) \in \dot{y}$, so erzwingt p die Eigenschaft $\dot{x} \in \dot{y}$. Wegen der oben nachgewiesenen Axiome erzwingt *jede* Bedingung das Paarmengenaxiom. Aber wie sieht es mit einem beliebigen φ wie im Aussonderungsaxiom aus?
Angenommen, wir versuchen den Beweis des Aussonderungsaxioms. Es sei

$$u \in \{u \in a | M[G] \models \varphi(u)\}$$

und wir wollen zeigen, dass $u \in \dot{b}^G$. Wir benötigen dann ein $r \in G$ und einen Namen $\dot{u}$ mit $\dot{u}^G = u$ und $(\dot{u}, r) \in \dot{b}$. Nach dem tentativen Ansatz für $\dot{b}$ hieße das, dass r die Eigenschaft $\varphi(\dot{u})$ erzwingt. Das bedeutet, dass eine Eigenschaft, die in $M[G]$ gilt, von einer Bedingung im Filter erzwungen wird.
Insbesondere brauchen wir für jede Aussage ψ, dass es eine Bedingung p im Filter gibt, so dass p erzwingt ψ oder p erzwingt $\neg\psi$. Wie lässt sich dieses erreichen. Wir wollen die Erzwingungsrelation über den Aufbau von ψ rekursiv erklären. Angenommen, wir hätten bereits eine Definition von „r erzwingt ψ“. Wir wollen für diese Relation bereits das Zeichen $\Vdash$ als Abkürzung benutzen. Dann gilt wegen des Abschlusses von Filtern nach oben:

$$r \Vdash \neg\psi \rightarrow \neg\exists p \leq r \ p \Vdash \psi.$$

Wir postulieren an dieser Stelle nun eine Äquivalenz, denn dann hätten wir eine rekursive Definition von $\Vdash$ im Negationsfall. Dieser drastische Ansatz lässt sich wirklich durchführen, wie wir später sehen werden.

$$r \Vdash \neg\psi \leftrightarrow \neg\exists p \leq r \ p \Vdash \psi.$$

Allerdings können wir nicht mehr mit allgemeinen Filtern arbeiten, sondern wir müssen uns auf eine Teilklasse von *generischen* Filtern beschränken. Die zugehörige Definition können wir folgendermaßen motivieren: **„Lemma“.** Die Menge $D = \{s \in P | \ s \Vdash \psi \ \vee \ s \Vdash \neg\psi\}$ ist *dicht* in P, d.h. $\forall r \in P \exists s \in D \ s \leq r$.

Dieses folgt sofort aus dem obigen Ansatz. Nach dem bereits Gesagten benötigen wir nun, dass die dichte Menge D von dem Filter G geschnitten wird. Unter der weiteren starken Annahme, dass die Menge D ein Element des Grundmodells ist, führt dieses dann zu folgenden, nun formal korrekten Definitionen.

16.1 Generische Filter

Definition 16.1 Sei $(P, \leq, 1_P)$ eine Forcing-Halbordnung.

(a) Sei $D \subseteq P$. Wir definieren: D ist **dicht in** $P :\equiv \forall p \in P\, \exists q \in D\; q \leq p$.

(b) Sei G ein Filter auf $(P, \leq)$. Wir definieren:
G ist P-**generisch über** $M :\equiv \forall D \in M\; (D \text{ dicht in } P \longrightarrow D \cap G \neq \emptyset)$.

Da das Grundmodell M abzählbar gewählt ist, existieren generische Filter:

Satz 16.2 (Existenzsatz für generische Filter) *Sei $(P, \leq, 1_P)$ eine Forcing-Halbordnung und $\mathcal{D}$ sei höchstens abzählbar. Dann existiert zu jedem $p_0 \in P$ ein P-generischer Filter G über $\mathcal{D}$ mit $p_0 \in G$.*

Beweis. Sei $\{D_n \mid n < \omega\}$ eine Aufzählung derjenigen Elemente von $\mathcal{D}$, die dicht in P sind. Definiere rekursiv eine bzgl. $\leq$ absteigende Folge $(p_n \mid n < \omega)$ wie folgt:

p_0 sei das im Satz genannte Element von P;
ist p_n bereits definiert, so sei $p_{n+1} \in D_n$ mit $p_{n+1} \leq p_n$; ein solches p_{n+1} existiert, da D_n dicht in P ist.

Setze $G :\equiv \{p \in P \mid \exists n < \omega\, p_n \leq p\}$. Dann gilt $p_0 \in G$ und $P \cap D \neq \emptyset$ für jedes $D \in \mathcal{D}$, das dicht in P ist. Da $\leq$ transitiv ist, ist G nach oben abgeschlossen: ist nämlich $p \in G$ und $p \leq q$, so wähle $n < \omega$ mit $p_n \leq p$; aus $p_n \leq p$ und $p \leq q$ folgt $p_n \leq q$, d.h., $q \in G$. Schließlich sind je zwei Elemente $p, q \in G$ kompatibel in G: Wähle zu p, q nämlich $k, l < \omega$ mit $p_k \leq p$ und $p_l \leq q$; da $(p_n \mid n < \omega)$ absteigend und $\leq$ transitiv ist, ist $p_{\max\{k,l\}} \leq p$ und $p_{\max\{k,l\}} \leq q$. Damit ist G als Filter nachgewiesen. QED

16.2 Die Forcingrelation $\Vdash$.

Definition 16.3 Sei $\varphi(\dot{x}_0, \dots, \dot{x}_{n-1})$ eine Formel der Forcing-Sprache, d.h., $\varphi(v_0, \dots, v_{n-1})$ ist eine $\in$-Formel und $\dot{x}_0, \dots, \dot{x}_{n-1} \in M$ sind M-Namen. Für $p \in P$ setzen wir

$$p \Vdash_P \varphi(\dot{x}_0, \dots, \dot{x}_{n-1}) \;:\equiv\; \forall G \Big((G \text{ ist } P\text{-generischer Filter über } M \wedge p \in G) \longrightarrow \varphi^{M[G]}(\dot{x}_0^G \dots, \dot{x}_{n-1}^G) \Big)$$

In diesem Fall sagen wir, p **erzwingt** $\varphi(\dot{x}_0, \dots, \dot{x}_{n-1})$. Ist P aus dem Zusammenhang bekannt, so schreiben wir $\Vdash$ statt $\Vdash_P$.

Bemerkung 16.4 Aus **??** folgt

$$p \Vdash_P \varphi(\dot{x}_0, \dots, \dot{x}_{n-1}) \longleftrightarrow \forall G \Big((G \text{ ist } P\text{-generischer Filter über } M \wedge p \in G) \longrightarrow (\varphi(\dot{x}_0^G \dots, \dot{x}_{n-1}^G))^{M[G]}$$

Erzwingen vererbt sich von schwächeren auf stärkere Bedingungen und von stärkeren auf schwächere Aussagen:

Lemma 16.5 *(a) Wenn $p \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \dots, \dot{x}_{n-1})$ gilt, so gilt $q \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \dots, \dot{x}_{n-1})$ für alle $q \leq p$.*

(b) Wenn $p \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1})$ und wenn $\varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1}) \to \psi(\dot{y}_0, \ldots, \dot{y}_{n-1})$ eine Tautologie ist, so folgt $p \Vdash \psi(\dot{y}_0, \ldots, \dot{y}_{n-1})$.

(c) Gilt $(\dot{x}, p) \in \dot{y}$ mit $p \in P$, so gilt $p \Vdash \dot{x} \in \dot{y}$.

Beweis. zu (a). Sei $q \leq p$. Ist G ein P-generischer Filter über M mit $q \in G$, so ist $p \in G$ wegen des Abschlusses des Filters nach oben. Wegen $p \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1})$ gilt $\varphi^{M[G]}(\dot{x}_0^G, \ldots, \dot{x}_{n-1}^G)$. Also gilt $q \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1})$.

zu (b). Betrachte einen P-generischen Filter über M mit $p \in G$. Nach Voraussetzung ist $M[G] \models \varphi(\dot{x}_0^G, \ldots, \dot{x}_{m-1}^G)$, und da $\varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1}) \to \psi(\dot{y}_0, \ldots, \dot{y}_{n-1})$ eine Tautologie ist, ist $M[G] \models \psi(\dot{y}_0^G, \ldots, \dot{y}_{m-1}^G)$.

zu (c). Ist G ein P-generischer Filter über M mit $p \in G$, so gilt unter den Voraussetzungen von (c) $\dot{x}^G \in \dot{y}^G$ nach Definition von $\dot{y}^G$. Dies ist nach **??** gleichwertig mit mit $(\dot{x}^G \in \dot{y}^G)^{M[G]}$. QED

Von entscheidender Bedeutung für die Forcing-Technik ist die Definierbarkeit der Erzwingungsrelation im Grundmodell M, d.h. die Definierbarkeit der Relation

$$\mathrm{Forc}_\varphi :\equiv \{(p, \dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1}) | p \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1})\}$$

für jede $\in$-Formel φ. Wir zeigen dies durch Induktion über den Formelaufbau, wobei wir der Einfachheit halber zunächst die *Induktionsschritte* behandeln. Parallel dazu wird gezeigt, dass jede in einer generischen Erweiterung erfüllte Aussage durch ein Element des generischen Filters erzwungen wird.

Satz 16.6 *Seien $\varphi(v_0, \ldots, v_{m-1})$ und $\psi(v_0, \ldots, v_{m-1})$ $\in$-Formeln, für die Forc_φ und Forc_ψ in M definierbar sind. Weiter gelte für jede generische Erweiterung $M[G]$ und $\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1} \in M$: falls $M[G] \models \varphi(\dot{x}_0^G, \ldots, \dot{x}_{m-1}^G)$, so gibt es eine Bedingung $p \in G$ mit $p \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1})$. Entsprechendes sei für ψ vorausgesetzt. Dann gilt für alle Namen $\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1} \in M$:*

(a) $p \Vdash (\varphi \wedge \psi)(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1})$ gdw. $p \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1})$ und $p \Vdash \psi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1})$.

(b) $p \Vdash \neg\varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1})$ gdw. $\forall q \leq p\ \neg q \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1})$.

(c) $p \Vdash \forall v_0 \varphi(v_0, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{m-1})$ gdw. $\forall \dot{x}_0 \in M\ p \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1})$.

(d) Die Relationen $\mathrm{Forc}_{\varphi\wedge\psi}$, $\mathrm{Forc}_{\neg\varphi}$ und $\mathrm{Forc}_{\forall v_0 \varphi}$ sind im Grundmodell M definierbar.

(e) Wenn $M[G] \models (\varphi \wedge \psi)(\dot{x}_0^G, \ldots, \dot{x}_{m-1}^G)$, so gibt es eine Bedingung $p \in G$ mit $p \Vdash (\varphi \wedge \psi)(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1})$.

(f) Wenn $M[G] \models \neg\varphi(\dot{x}_0^G, \ldots, \dot{x}_{m-1}^G)$, so gibt es eine Bedingung $p \in G$ mit $p \Vdash \neg\varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1})$.

(g) Wenn $M[G] \models \forall v_0\, \varphi(v_0, \dot{x}_1^G \ldots, \dot{x}_{m-1}^G)$, so gibt es eine Bedingung $p \in G$ mit $p \Vdash \forall v_0 \varphi(v_0, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{m-1})$.

Beweis. (a) Die Implikation von links nach rechts folgt sofort aus 16.5(b). Umgekehrt sei $p \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1})$ und $p \Vdash \psi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1})$. Betrachte G P-generisch über M mit $p \in G$. Dann ist $M[G] \models \varphi(\dot{x}_0^G, \ldots, \dot{x}_{m-1}^G)$ und $M[G] \models \psi(\dot{x}_0^G, \ldots, \dot{x}_{m-1}^G)$. Dann ist $M[G] \models (\varphi \wedge \psi)(\dot{x}_0^G, \ldots, \dot{x}_{m-1}^G)$. Also gilt $p \Vdash (\varphi \wedge \psi)(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1})$.

(b) Ein Allquantor kann als infinitäre Konjunktion aufgefasst werden, der folgende Beweis entspricht daher dem für die binäre Konjunktion. Die Implikation von links nach rechts folgt wieder aus 16.5(b). Umgekehrt sei $\forall \dot{x}_0 \in M\ p \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1})$. Betrachte G P-generisch über M mit $p \in G$. Dann ist $\forall \dot{x}_0 \in M\ M[G] \models \varphi(\dot{x}_0^G, \ldots, \dot{x}_{m-1}^G)$. Dann ist $M[G] \models \forall v_0\, \varphi(v_0, \ldots, \dot{x}_{m-1}^G)$. Also $p \Vdash \forall v_0 \varphi(v_0, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{m-1})$.
(c) Sei $p \Vdash \neg\varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1})$ und $q \leq p$. Angenommen $q \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1})$. Wähle G P-generisch über M mit $q \in G$. Dann ist $M[G] \models \varphi(\dot{x}_0^G, \ldots, \dot{x}_{m-1}^G)$. Andererseits ist $p \in G$ und $M[G] \models \neg\varphi(\dot{x}_0^G, \ldots, \dot{x}_{m-1}^G)$, Widerspruch.
Für die Umgekehrung sei die linke Seite der Äquivalenz falsch: $\neg p \Vdash \neg\varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1})$. Nach Definition der Forcingrelation wähle einen P-generischen Filter G mit $p \in G$ und $M[G] \models \varphi(\dot{x}_0^G, \ldots, \dot{x}_{m-1}^G)$. Nach den Voraussetzungen über φ gibt es eine Bedingung $r \in G$ mit $r \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1})$. Wähle ein $q \in G$ mit $q \leq p, r$. Nach 16.5 ist dann $q \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1})$. Damit ist auch die rechte Seite der Äquivalenz falsch.
(d) Unter der Voraussetzung, dass Forc_φ und Forc_ψ in M definierbar sind, liefern die Punkte (a)-(c) Definitionen von $\mathrm{Forc}_{\varphi\wedge\psi}$, $\mathrm{Forc}_{\neg\varphi}$ und $\mathrm{Forc}_{\forall v_0 \varphi}$ im Grundmodell M.
(e) Sei $M[G] \models (\varphi \wedge \psi)(\dot{x}_0^G, \ldots, \dot{x}_{m-1}^G)$. Dann ist $M[G] \models \varphi(\dot{x}_0^G, \ldots, \dot{x}_{m-1}^G)$ und $M[G] \models \psi(\dot{x}_0^G, \ldots, \dot{x}_{m-1}^G)$. Nach Voraussetzung gibt es Bedingungen $p, q \in G$ mit $p \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1})$ und $q \Vdash \psi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1})$. Wähle $r \in G$ mit $r \leq p, q$. Dann ist $r \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1})$, $r \Vdash \psi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1})$ und $r \Vdash (\varphi \wedge \psi)(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1})$
(f) Sei $M[G] \models \neg\varphi(\dot{x}_0^G, \ldots, \dot{x}_{m-1}^G)$. Definiere die Menge

$$D = \{p \in P | p \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1}) \text{ oder } \forall q \leq p\, \neg q \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1})\}.$$

Da Forc_φ in M definierbar ist, ist $D \in M$. Die Menge D ist offensichtlich dicht in P. Da G P-generisch über M ist, können wir ein $p \in G \cap D$ wählen. Angenommen, es wäre $p \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1})$. Dann wäre $M[G] \models \varphi(\dot{x}_0^G, \ldots, \dot{x}_{m-1}^G)$, Widerspruch. Also ist $\forall q \leq p\, \neg q \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1})$. Nach (b) ist dann $p \Vdash \neg\varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1})$, wie verlangt.
(g) Sei $M[G] \models \forall v_0\, \varphi(v_0, \dot{x}_1^G \ldots, \dot{x}_{m-1}^G)$. Definiere die Menge

$$D = \{p \in P | \forall \dot{x}_0 \in M\, p \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{m-1}) \text{ oder } \exists \dot{x}_0 \in M\, p \Vdash \neg\varphi(\dot{x}_0, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{m-1})\}.$$

Da Forc_φ und $\mathrm{Forc}_{\neg\varphi}$ in M definierbar sind, ist $D \in M$.
Behauptung: D ist dicht in P.
Beweis. Betrachte $r \in P$. Wenn $\forall \dot{x}_0 \in M\, r \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{m-1})$, so ist $r \in D$. Andernfalls wähle ein $\dot{x}_0 \in M$ mit $\neg r \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{m-1})$. Wähle einen P-generischen Filter H über M, so dass $M[H] \models \neg\varphi(\dot{x}_0^H, \dot{x}_1^H, \ldots, \dot{x}_{m-1}^H)$. Nach dem eben bewiesenen (f) gibt es eine Bedingung $s \in H$ mit $s \Vdash \neg\varphi(\dot{x}_0, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{m-1})$. Wähle schließlich eine Bedingung $p \in H$ mit $p \leq r, s$. Dann ist $p \Vdash \neg\varphi(\dot{x}_0, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{m-1})$ und $p \in D$. qed(Behauptung)
Wegen der Behauptung und der Generizität von G können wir ein $p \in G \cap D$ wählen. Angenommen es gelte $\exists \dot{x}_0 \in M\, p \Vdash \neg\varphi(\dot{x}_0, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{m-1})$. Wähle $\dot{x}_0 \in M$ mit $p \Vdash \neg\varphi(\dot{x}_0, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{m-1})$. Da $p \in G$ gilt dann $M[G] \models \neg\varphi(\dot{x}_0^G, \dot{x}_1^G, \ldots, \dot{x}_{m-1}^G)$, im Widerspruch zur Beweisannahme. Daher muss p in „der anderen Hälfte" von D liegen, und $\forall \dot{x}_0 \in M\, p \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{m-1})$. Nach (c) ist dann $p \Vdash \forall v_0\, \varphi(v_0, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{m-1})$. QED

16.3 Der atomare Fall

Überraschenderweise ist die Betrachtung der atomaren Fälle $p \Vdash x_1 = x_2$ und $p \Vdash x_1 \in x_2$ besonders verwickelt. Dies ist in der hierarchischen Struktur allgemeiner Mengen begründet. Die Eigenschaft $x_1^G = x_2^G$ bedeutet, dass

$$\{y_1^G | \exists s_1 \in G\, (y_1, s_1) \in x_1\} = \{y_2^G | \exists s_2 \in G\, (y_2, s_2) \in x_2\}.$$

Für die Gleichheit dieser zwei Interpretationen ist es erforderlich, dass es zu jedem y_1^G links ein y_2^G rechts, und umgekehrt, gibt, so dass $y_1^G = y_2^G$. Dies führt zu einer rekursiven „Definition" der Gleichheit, die sich in der Forcing-Relation widerspiegelt. Wir benötigen eine kleine technische Definition:

Definition 16.7 Sei $p \in P$ und $D \subseteq P$. D ist **dicht in** P **unter** p $:\equiv \forall q \leq p\, \exists r \leq q\; r \in D$.

Lemma 16.8
(a) $p \Vdash x_1 = x_2$ *gdw.*

$$(\alpha) \quad \forall (y_1, s_1) \in x_1 \Big(s_1 \in P \longrightarrow \underbrace{\{q \in P \mid q \leq s_1 \to \exists (y_2, s_2) \in x_2 (s_2 \in P \wedge q \leq s_2 \wedge q \Vdash y_1 = y_2)\}}_{\equiv: D_{(\alpha)}(y_1, s_1, x_2)} \text{ ist dicht in } P \text{ unter } p \Big) \textbf{ und}$$

$$(\beta) \quad \forall (y_2, s_2) \in x_2 \Big(s_2 \in P \longrightarrow \underbrace{\{q \in P \mid q \leq s_2 \to \exists (y_1, s_1) \in x_1 (s_1 \in P \wedge q \leq s_1 \wedge q \Vdash y_1 = y_2)\}}_{\equiv: D_{(\beta)}(x_1, y_2, s_2)} \text{ ist dicht in } P \text{ unter } p \Big).$$

(b) $\mathrm{Forc}_{v_1 = v_2}$ *ist in* M *mit Hilfe der Rekursionsvorschrift aus (a) definierbar.*
(c) Wenn $x_1^G = x_2^G$, *so gibt es eine Bedingung* $p \in G$ *mit* $p \Vdash x_1 = x_2$.

BEWEIS. Wir beweisen das Lemma durch Induktion über die Tripel $(p, x_1, x_2) \in P \times M \times M$ mit der stark fundierten Relation

$$(q, y_1, y_2) R (p, x_1, x_2) :\equiv q \in P \wedge p \in P \wedge y_1 \in \mathrm{dom}(x_1) \wedge y_2 \in \mathrm{dom}(x_2).$$

Betrachte also ein Tripel $(p, x_1, x_2) \in P \times M \times M$ mit der Annahme, dass $\mathrm{Forc}_{v_1 = v_2}$ bezüglich R unterhalb von (p, x_1, x_2) durch die Äquivalenz in (a) rekursiv definiert ist, und (b) und (c) unterhalb von (p, x_1, x_2) gelten.
(a) Angenommen, $p \Vdash x_1 = x_2$. Betrachte $p' \leq p$ Wir suchen eine Bedingung $p'' \leq p'$, so dass die Eigenschaften (α) und (β) mit p'' statt mit p erfüllt sind. Da p' beliebig unterhalb von p gewählt werden kann, erfüllt dann auch p selbst die Eigenschaften (α) und (β).
Wähle einen Filter G, der P-generisch über M ist, mit $p' \in G$. Dann ist $p' \Vdash x_1 = x_2$ und $x_1^G = x_2^G$. Setze

$$
\begin{aligned}
D :\equiv \Big\{ p'' \in P \,\Big|\, & p'' \text{ erfüllt die Eigenschaften } (\alpha) \text{ und } (\beta) \\
& \vee \exists (y_1, s_1) \in x_1 \Big(s_1 \in P \wedge \forall q \le p'' \\
& \quad (q \le s_1 \wedge \forall (y_2, s_2) \in x_2((s_2 \in P \wedge q \Vdash y_1 = y_2) \to \neg\, q \le s_2)) \Big) \qquad (\neg\alpha) \\
& \vee \exists (y_2, s_2) \in x_2 \Big(s_2 \in P \wedge \forall q \le p'' \\
& \quad (q \le s_2 \wedge \forall (y_1, s_1) \in x_1((s_1 \in P \wedge q \Vdash y_1 = y_2) \to \neg\, q \le s_1)) \Big) \Big\}. \; (\neg\beta)
\end{aligned}
$$

Aus der induktiven Definierbarkeitsannahme (b) folgt sofort, dass

(2) $D \in M$.

(3) D ist dicht in P.

BEWEIS. Betrachte $r \in P$. Erfüllt dann r die Eigenschaften (α) und (β), so ist $r \in D$, und die Dichtheitseigenschaft gilt. Wir nehmen nun an, dass eine der Bedingungen (α) bzw. (β) nicht erfüllt ist. O.E. sei (α) nicht erfüllt, d.h.,

$$
\begin{gathered}
\exists (y_1, s_1) \in x_1 \Big(s_1 \in P \wedge \\
\underbrace{\{ q \in P \mid q \le s_1 \to \exists (y_2, s_2) \in x_2 (s_2 \in P \wedge q \le s_2 \wedge q \Vdash y_1 = y_2) \}}_{= D_{(\alpha)}(y_1, s_1, x_2)} \\
\text{ist } \textbf{nicht} \text{ dicht in } P \text{ unter } r \Big).
\end{gathered}
$$

Da eine Menge C genau dann nicht dicht unter r ist, wenn es ein $p'' \le r$ gibt, so daß für alle $q \le p$ gilt $q \notin C$, ist die letzte Formel gleichwertig zu

$$\exists (y_1, s_1) \in x_1 (s_1 \in P \wedge \exists p'' \le r \, \forall q \le p'' \; q \notin D_{(\alpha)}(y_1, s_1, x_2)).$$

Wähle dementsprechend $p'' \le r$ mit $\exists (y_1, s_1) \in x_1 (s_1 \in P \wedge \forall q \le p'' \; q \notin D_{(\alpha)}(y_1, s_1, x_2))$. Es ist leicht zu sehen daß $q \notin D_{(\alpha)}(y_1, s_1, x_2)$ gleichwertig ist mit $q \le s_1 \wedge \forall (y_2, s_2) \in x_2((s_2 \in P \wedge q \Vdash y_1 = y_2) \to \neg\, q \le s_2)$. Also gilt $(\neg\alpha)$ für p'' und somit $p'' \in D$. Wegen $p'' \le r$ ist p'' wie für die Dichtheit benötigt. qed(3)

Da G P-generisch über M ist, existiert wegen (2) und (3) ein $p'' \in G \cap D$. Der Satz ist bewiesen, wenn wir gezeigt haben:

(4) p'' erfüllt die Eigenschaften (α) und (β).

BEWEIS. Wenn dies nicht gilt, gilt $(\neg\alpha)$ oder $(\neg\beta)$ wegen $p'' \in D$. Aus Symmetriegründen können wir annehmen, daß $(\neg\alpha)$ für p'' erfüllt ist. Wähle $(y_1, s_1) \in x_1$ mit $s_1 \in P$ wie in $(\neg\alpha)$. Setzt man in $(\neg\alpha)$ $q :\equiv p''$, so folgt $p'' \le s_1$, so dass

(4.1) $s_1 \in G$

wegen $p \in G$ folgt. Nach Definition von x_1^G ist dann $y_1^G \in x_1^G$, also $y_1^G \in x_2^G = \{y_2^G \mid \exists s_2 \in G\ (y_2, s_2) \in x_2\}$ wegen $x_1^G = x_2^G$. Wähle ein $(y_2, s_2) \in x_2$ mit

(4.2) $s_2 \in G$ und $y_1^G = y_2^G$.

Dann gilt $(s_2, y_1, y_2) R(s, x_1, x_2)$, so daß $y_1^G = y_2^G$ nach Induktionsvoraussetzung die Existenz eines

(4.3) $q' \in G$

impliziert, so dass

(4.4) $q' \Vdash y_1 = y_2$

gilt. Wähle $q \in G$ mit $q \leq p'', s_1, s_2, q'$. (Beachte: Nach (4.1) – (4.4) gilt $s_1, s_2, q' \in G$; nach Wahl von p'' ist $p'' \in G$.) Wegen $q \leq q'$ und (4.4) folgt $q \Vdash y_1 = y_2$, so dass für q gilt

$$q \leq p'' \wedge q \leq s_1 \wedge (y_2, s_2) \in x_2 \wedge s_2 \in P \wedge q \Vdash y_1 = y_2 \wedge q \leq s_2.$$

Dies widerspricht $(\neg\alpha)$. Also muß (4) doch richtig sein. qed(4)

Damit ist eine Implikation der in (a) behaupteten Äquivalenz gezeigt.
Umgekehrt betrachte $p \in G$ und $x_1, x_2 \in M$, die die Eigenschaften (α) und (β) erfüllen. Wir behaupten, dass $x_1^G = x_2^G$. Aus Symmetriegründen genügt es, $x_1^G \subseteq x_2^G$ zu zeigen. Hierzu betrachte $z \in x_1^G = \{y_1^G \mid \exists s_1 \in G\ (y_1, s_1) \in x_1\}$. Wähle $y_1 \in \mathrm{dom}(x_1)$ und ein $s_1 \in G$, so daß $(y_1, s_1) \in x_1$ und $z = y_1^G$ ist. Nach der Annahme (α) ist

$$D_{(\alpha)}(y_1, s_1, x_2) = \{q \in P \mid q \leq s_1 \rightarrow \exists (y_2, s_2) \in x_2 (s_2 \in P \wedge q \leq s_2 \wedge q \Vdash y_1 = y_2)\}$$

dicht in P unter p.

(5) $\exists q \in D_{(\alpha)}(y_1, s_1, x_2) \cap G\ \ q \leq s_1$.

Beweis. Sei $r \in G$ mit $r \leq p, s_1$. Da $D_{(\alpha)}(y_1, s_1, x_2)$ dicht unter p ist, ist $D_{(\alpha)}(y_1, s_1, x_2)$ auch dicht unter r. Da nach **??** $D_{(\alpha)}(y_1, s_1, x_2) \in M$ gilt und $r \in G$ ist, existiert nach **??** ein $q \in D_{(\alpha)}(y_1, s_1, x_2) \cap G$ mit $q \leq r$. Wegen $r \leq s_1$ ist q wie benötigt. qed(5)

Sei nun q wie in (5). Wegen $q \in D_{(\alpha)}(y_1, s_1, x_2)$ und $q \leq s_1$ existiert nach Definition von $D_{(\alpha)}(y_1, s_1, x_2)$ ein $(y_2, s_2) \in x_2$ mit $s_2 \in P$, $q \leq s_2$ und $q \Vdash y_1 = y_2$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $y_1^G = y_2^G$. Wegen $q \leq s_2$ und $q \in G$ ist $s_2 \in G$. Aus $(y_2, s_2) \in x_2$ folgt also $y_2^G \in x_2^G$ nach Definition von x_2^G. Insgesamt ergibt sich $z = y_1^G \in x_2^G$ und dieses war für (a) zu zeigen.
(b) Aus (a) folgt sofort, dass man die rekursive Definition von $p \Vdash v_1 = v_2$ auf das Tripel p, x_1, x_2 ausweiten kann, und dass diese im Grundmodell M ausgewertet werden kann.
(c) Angenommen, $x_1^G = x_2^G$. Wir hatten im Beweis von (a) aus der gleichen Annahme die Existenz eines $p'' \in G$ hergeleitet, dass die Eigenschaften (α) und (β) erfüllt (siehe (4)). Nach (a) gilt dann $p'' \Vdash x_1 = x_2$. QED

Die Behandlung der Formel $v_1 \in v_2$ ist wieder einfacher:

Lemma 16.9

(a) $p \Vdash x_1 \in x_2$ *gdw.* $D :\equiv \{q \in P \mid \exists (y,s) \in x_2\ (s \in P\ \wedge\ q \leq s\ \wedge\ q \Vdash x_1 = y)\}$ *ist dicht in* P *unter* p

(b) $\mathrm{Forc}_{v_1 \in v_2}$ *ist in* M *mit Hilfe der Formel aus (a) definierbar.*

(c) Wenn $x_1^G \in x_2^G$, *so gibt es eine Bedingung* $p \in G$ *mit* $p \Vdash x_1 \in x_2$.

Beweis. (a) Angenommen $p \Vdash x_1 \in x_2$. Um die Dichtheit von D zu zeigen, betrachte eine Bedingung $p' \leq p$. Dann gilt $p' \Vdash x_1 \in x_2$. Wähle einen Filter G, der P-generisch über M ist und so dass $p' \in G$. Dann ist $x_1^G \in x_2^G$. Nach Definition von x_2^G existiert ein $(y,s) \in x_2$ mit $s \in G$ und $x_1^G = y^G$. Nach Teil (c) des letzten Lemmas können wir ein $r \in G$ wählen mit $r \Vdash x_1 = y$. Wähle $q \in P$ mit $q \leq r, s, p'$. Dann ist $q \in D$ und $q \leq p'$.
Umgekehrt sei die Menge D dicht in P unter p. Betrachte einen P-generischen Filter G über M mit $p \in G$. Da D dicht in P unter $p \in G$ ist, können wir eine Bedingung $q \in D \cap G$ wählen. Nach Definition der Menge D wähle $(y,s) \in x_2$, so dass

$$s \in P\ \wedge\ q \leq s\ \wedge\ q \Vdash x_1 = y.$$

Dann ist $s \in G$ und $y^G \in x_2^G$. Weiter ist $x_1^G = y^G$. Also ist $x_1^G \in x_2^G$, wie gewünscht.
(b) folgt sofort aus (a).
(c) Angenommen $x_1^G \in x_2^G$. Nach Definition von x_2^G existiert ein $(y,s) \in x_2$ mit $s \in G$ und $x_1^G = y^G$. Nach Teil (c) des letzten Lemmas können wir ein $r \in G$ wählen mit $r \Vdash x_1 = y$. Wähle $p \in G$ mit $p \leq r, s$. Nach 16.5 gilt $p \Vdash x_1 = y$ und $p \Vdash y \in x_2$. Zusammen gilt dann $p \Vdash x_1 \in x_2$. QED

Die Lemmas 16.6, 16.8 und 16.9 ergeben zusammen mit der Definition der Forcing-Relation das folgende *Forcing-Theorem* als Schema über die Formel-Komplexität:

Satz 16.10 *Seien* $\varphi(v_0, \ldots, v_{m-1})$ *eine* $\in$*-Formeln. Dann gilt:*

(a) Die Relation Forc_φ *ist im Grundmodell* M *definierbar.*

(b) Für alle Namen $\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1} \in M$ *gilt:* $M[G] \models \varphi(\dot{x}_0^G, \ldots, \dot{x}_{m-1}^G)$ *gdw. es eine Bedingung* $p \in G$ *gibt mit* $p \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1})$.

16.4 Eigenschaften der Forcing-Relation $\Vdash$.

Satz 16.11 *Sei* M *ein Grundmodell und* $(P, \leq, 1_P)$ *eine Forcing-Halbordnung für* M. *Ferner sei* φ *eine* $\in$*-Formel und* $\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1} \in M$. *Dann gilt:*

(a) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- *(i)* $p \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1})$;
- *(ii)* $\forall q \leq p\ q \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1})$;
- *(iii)* $\{q \in P \mid q \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1})\}$ *ist dicht in* P *unter* p.

(b) $\{p \in P \mid p \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1}) \vee p \Vdash \neg\varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1})\}$ *ist dicht in* P *und Element von* M.

BEWEIS. (a) Es genügt, (iii)$\to$(i) zu zeigen. Angenommen, $D :\equiv \{q \in P \mid q \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1})\}$ ist dicht in P unter p. Betrachte einen P-generischen Filter G über M mit $p \in G$. Nach dem Forcing-Theorem ist $D \in M$, und da G generisch über M ist, ist $D \cap G \neq \emptyset$. Wähle $q \in D \cap G$. Da $q \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1})$, ist $M[G] \models \varphi(\dot{x}_0^G, \ldots, \dot{x}_{n-1}^G)$. Also gilt $p \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1})$.
(b) folgt sofort aus 16.6(b) und 16.10. QED

Wir halten nochmals fest, wie sich das Erzwingen entlang des Formelaufbaus ergibt:

Satz 16.12 *Sei M ein Grundmodell und $(P, \leq, 1_P)$ eine Forcing-Halbordnung für M. Ferner seien φ und ψ $\in$-Formeln und $\dot{x}, \dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1} \in M$. Dann gilt:*

(a) $p \Vdash \neg\varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1})$ *gdw.* $\neg \exists q \leq p\; q \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1})$.

(b) $p \Vdash (\varphi \wedge \psi)(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1})$ *gdw.* $p \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1})$ *und* $p \Vdash \psi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1})$.

(c) $p \Vdash (\varphi \vee \psi)(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1})$ *gdw.* $\{q \in P \mid q \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1}) \vee q \Vdash \psi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1})\}$ *dicht in P unter p ist.*

(d) $p \Vdash \forall v_0 \varphi(v_0, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{m-1})$ *gdw.* $\forall \dot{x}_0 \in M\; p \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1})$

(e) $p \Vdash \exists v_0\, \varphi(v, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{m-1})$ *gdw.* $\{q \in P \mid \exists \dot{x}_0 \in M\; q \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1})\}$ *dicht in P unter p ist.*

(f) $p \Vdash \forall v_0\, (v_0 \in \dot{x} \to \varphi(v, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{m-1}))$ *gdw.* $\forall (\dot{x}_0, s) \in \dot{x}\; \{q \in P | q \leq s \to q \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{m-1}))\}$ *dicht in P unter p ist.*

(g) $p \Vdash \exists v_0\, (v_0 \in \dot{x} \wedge \varphi(v, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{m-1}))$ *gdw.* $\{q \in P \mid \exists (\dot{x}_0, s) \in \dot{x}\; (q \leq s \wedge q \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{m-1}))\}$ *dicht in P unter p ist.*

BEWEIS. Die Aussagen (a),(b) und (d) waren in 16.6 gezeigt.
(c) Angenommen $p \Vdash (\varphi \vee \psi)$. Betrachte $r \leq p$. Wähle einen P-generischen Filter G über M mit $r \in G$. Dann gilt $M[G] \models (\varphi \vee \psi)$. Falls $M[G] \models \varphi$, wähle ein $s \in G$ mit $s \Vdash \varphi$. Wähle ein $q \leq r, s$. Dann gilt $q \Vdash \varphi$. Ähnlich verfährt man, falls $M[G] \models \psi$. Damit ist die gewünschte Dichtheit gezeigt.
Umgekehrt sei die Menge $D :\equiv \{q \in P \mid q \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1}) \vee q \Vdash \psi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1})\}$ dicht in P unter p. Betrachte einen P-generischen Filter G über M mit $p \in G$. Da G generisch ist, kann man $q \in G \cap D$, $q \leq p$ wählen. Dann ist $q \Vdash \varphi$ oder $q \Vdash \psi$, $M[G] \models \varphi$ oder $M[G] \models \psi$. Also $M[G] \models (\varphi \vee \psi)$.
(e) Angenommen $p \Vdash \exists v_0\, \varphi(v, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{m-1})$. Betrachte $r \leq p$. Wähle einen P-generischen Filter G über M mit $r \in G$. Dann gilt $M[G] \models \exists v_0\, \varphi(v, \dot{x}_1^G, \ldots, \dot{x}_{m-1}^G)$. Wähle ein $\dot{x}_0 \in M$ mit $M[G] \models \varphi(\dot{x}_0^G, \dot{x}_1^G, \ldots, \dot{x}_{m-1}^G)$. Wähle ein $s \in G$ mit $s \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{m-1})$. Wähle ein $q \leq r, s$. Dann gilt $q \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{m-1})$. Damit ist die gewünschte Dichtheit bewiesen.
Umgekehrt sei die Menge $D :\equiv \{q \in P \mid \exists \dot{x}_0 \in M\; q \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1})\}$ dicht in P unter p. Betrachte einen P-generischen Filter G über M mit $p \in G$. Da G generisch ist, kann man $q \in G \cap D$, $q \leq p$ wählen. Wähle $\dot{x}_0 \in M$ mit $q \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1})$. Dann gilt $M[G] \models \varphi(\dot{x}_0^G, \ldots, \dot{x}_{m-1}^G)$ und $M[G] \models \exists v_0\, \varphi(v_0, \dot{x}_1^G, \ldots, \dot{x}_{m-1}^G)$.
(f) Angenommen, $p \Vdash \forall v_0\, (v_0 \in \dot{x} \to \varphi(v, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{m-1}))$. Betrachte $(\dot{x}_0, s) \in \dot{x}$. Setze $D :\equiv \{q \in P | q \leq s \to q \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{m-1}))\}$. Um die Dichtheit von D unter p zu zeigen, betrachte weiter $r \leq p$. Wenn $\neg r \leq s$, so ist bereits $r \in D$. Es sei also angenommen,

dass $r \leq s$. Wähle einen P-generischen Filter G über P mit $r \in G$. Dann ist $p \in G$ und $M[G] \models \forall v_0 \, (v_0 \in \dot{x}^G \rightarrow \varphi(v, \dot{x}_1^G, \ldots, \dot{x}_{m-1}^G))$. Weiter ist $s \in G$ und $\dot{x}_0^G \in \dot{x}^G$. Also $M[G] \models \varphi(\dot{x}_0^G, \dot{x}_1^G, \ldots, \dot{x}_{m-1}^G))$. Wähle $t \in G$ mit $t \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{m-1}))$. Wähle $q \leq r, t$. Dann ist $q \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{m-1}))$ und $q \in D$.
Umgekehrt sei $\forall (\dot{x}_0, s) \in \dot{x} \; \{q \in P | q \leq s \rightarrow q \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{m-1}))\}$ dicht in P unter p. Betrachte einen P-generischen Filter G über M mit $p \in G$. Betrachte ein $z \in \dot{x}^G$. Nach Definition der Interpretationsfunktion gibt es $(\dot{x}_0, s) \in \dot{x}$ mit $s \in G$ und $\dot{x}_0^G = z$. Setze $D :\equiv \{q \in P | q \leq s \rightarrow q \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{m-1}))\}$. Wähle ein $t \in G$ mit $t \leq s, p$. Nach Voraussetzung ist D dicht in P unter p und daher dicht in P unter $t \in G$. Mit der Generizität von G wähle $q \in G \cap D$, $q \leq t$. Dann ist $q \leq s$ und nach Definition von D ist $q \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{m-1}))$. $M[G] \models \varphi(\dot{x}_0^G, \dot{x}_1^G, \ldots, \dot{x}_{m-1}^G))$ und $M[G] \models \varphi(z, \dot{x}_1^G, \ldots, \dot{x}_{m-1}^G))$. Da z beliebiges Element von $\dot{x}^G$ war, gilt $M[G] \models \forall v_0 \in \dot{x} \varphi(v_0, \dot{x}_1^G, \ldots, \dot{x}_{m-1}^G))$. Also $p \Vdash \forall v_0 \, (v_0 \in \dot{x} \rightarrow \varphi(v, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{m-1}))$.
(g) Angenommen $p \Vdash \exists v_0 \, (v_0 \in \dot{x} \wedge \varphi(v, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{m-1}))$. Betrachte $r \leq p$. Wähle einen P-generischen Filter G über M mit $r \in G$. Dann gilt $M[G] \models \exists v_0 \, (v_0 \in \dot{x}^G \wedge \varphi(v, \dot{x}_1^G, \ldots, \dot{x}_{m-1}^G))$. Wähle ein $y \in \dot{x}^G$ mit $M[G] \models \varphi(y, \dot{x}_1^G, \ldots, \dot{x}_{m-1}^G)$. Nach Definition der Interpretation $\dot{x}^G$ von $\dot{x}$ können wir $(\dot{x}_0, s) \in \dot{x}$ wählen mit $s \in G$ und $\dot{x}_0^G = y$. Dann ist $M[G] \models \varphi(\dot{x}_0^G, \dot{x}_1^G, \ldots, \dot{x}_{m-1}^G)$. Wähle $t \in G$ mit $t \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{m-1})$. Wähle $q \leq r, s, t$. Dann zeigt q die gewünschte Dichtheit.
Umgekehrt sei die Menge $D :\equiv \{q \in P \,|\, \exists (\dot{x}_0, s) \in \dot{x} \; (q \leq s \wedge q \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{m-1}))\}$ dicht in P unter p. Betrachte einen P-generischen Filter G über M mit $p \in G$. Da G generisch ist, kann man $q \in G \cap D$, $q \leq p$ wählen. Wähle $(\dot{x}_0, s) \in \dot{x}$ mit $q \leq s \wedge q \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{m-1}))$. Dann gilt $\dot{x}_0^G \in \dot{x}^G$. Weiter gilt $M[G] \models \varphi(\dot{x}_0^G, \dot{x}_1^G, \ldots, \dot{x}_{m-1}^G)$. Also $M[G] \models \exists v_0 \, (v_0 \in \dot{x}^G \wedge \varphi(v_0, \dot{x}_1^G, \ldots, \dot{x}_{m-1}^G)$. QED

Bemerkung 16.13 Die umständlichen Formeln für das Erzwingen der atomaren Formeln $x_0 = x_1$ bzw. $x_0 \in x_1$ lassen sich durch die Fälle (f) und (g) des gerade bewiesenen Satzes erklären: beachte, dass $x_0 = x_1 \leftrightarrow \forall y_0 \in x_0 \exists y_1 \in x_1 \; y_0 = y_1 \wedge \forall y_1 \in x_1 \exists y_0 \in x_0 \; y_0 = y_1$ bzw. $x_0 \in x_1 \leftrightarrow \exists y_1 \in x_1 x_0 = y_1$.

17 ZFC in $M[G]$.

Durch die im Grundmodell M definierbare Forcing-Relation haben wir uns nun die Möglichkeit verschafft, Namen für die Mengenexistenzen in den komplizierteren Zermelo-Fraenkelschen Axiomen zu konstruieren.

Satz 17.1 *Es gilt* $(\mathbf{Aus})^{M[G]}$.

BEWEIS. Sei $\varphi(v, \vec{w})$ eine $\in$-Formel und seien $y, \vec{z} \in M[G]$. Nach 11.4 haben wir zu zeigen:

(1) $\quad \{v \in y \mid \varphi(v, \vec{z})^{M[G]}\} \in M[G]$.

BEWEIS. Wähle Namen $\dot{y}, \vec{\dot{z}} \in M$ mit $y = \dot{y}^G$ und $\vec{z} = \vec{\dot{z}}^G$ und setze

$$t :\equiv \{(\dot{x}, p) \mid \dot{x} \in \mathrm{dom}(\dot{y}) \wedge p \in P \wedge p \Vdash (\dot{x} \in \dot{y} \wedge \varphi(\dot{x}, \vec{\dot{z}}))\}.$$

Es gilt $t \in M$, da die Forcing-Relation in M definierbar ist und M insbesondere das Aussonderungsschema erfüllt. (1) folgt nun sofort aus

(1.1) $\quad t^G = \{v \in \dot{y}^G \mid \varphi(v, \vec{\dot{z}}^G)^{M[G]}\}$.

BEWEIS. zu „$\subseteq$". Sei $v \in t^G$. Nach Definition von $M[G]$ gilt dann $v = \dot{x}^G$, wobei $(\dot{x}, p) \in t$ für ein $p \in G$. Aus $(\dot{x}, p) \in t$ folgt $p \Vdash (\dot{x} \in \dot{y} \wedge \varphi(\dot{x}, \vec{\dot{z}}))$, was wegen $p \in G$ nach dem Forcing-Theorem auf $(\dot{x}^G \in \dot{y}^G \wedge \varphi(\dot{x}^G, \vec{\dot{z}}^G))^{M[G]}$, also $\dot{x}^G \in \dot{y}^G \wedge \varphi(\dot{x}^G, \vec{\dot{z}}^G)^{M[G]}$ führt. Wegen $v = \dot{x}^G$ bedeutet dies gerade, daß v Element der Menge auf der rechten Seite von (1.1) ist.
zu „$\supseteq$". Es gelte $v \in \dot{y}^G \wedge \varphi(v, \vec{\dot{z}}^G)^{M[G]}$. Wegen $v \in \dot{y}^G$ existiert nach Definition von $\dot{y}^G$ ein $(\dot{x}, q) \in \dot{y}$ mit $q \in G$, so daß $v = \dot{x}^G$ ist. Nach 16.5 gilt

$(*)$ $\quad q \Vdash \dot{x} \in \dot{y}$.

Wegen $\varphi(\dot{x}^G \vec{\dot{z}}^G)^{M[G]}$ existiert nach dem Forcing-Theorem ein $r \in G$ mit

$(**)$ $\quad r \Vdash \varphi(\dot{x}, \vec{\dot{z}})$.

Sei $p \in G$ eine gemeinsame Verstärkung von q, r. Dann gelten $(*)$ und $(**)$, wenn man q bzw. r durch p ersetzt, so daß $(\dot{x}, p) \in t$ ist. Wegen $p \in G$ ist dann $v = \dot{x}^G \in t^G$. qed(1.1)

Damit ist (1) bewiesen. qed(1)

Aus (1) ergibt sich $(\mathbf{Aus})^{M[G]}$. QED

Satz 17.2 *Es gilt* $(\mathbf{Pot})^{M[G]}$.

BEWEIS. Sei $a \in M[G]$, etwa $a = \dot{a}^G$ mit $\dot{a} \in M$. Nach 11.4 ist $\mathcal{P}(a) \cap M[G] \in M[G]$ zu zeigen. Setze

$$s :\equiv \{\dot{y} \in M \mid \dot{y} \subseteq \mathrm{dom}(\dot{a}) \times P\}.$$

Wegen $(\mathbf{Pot})^M$ und $\mathrm{dom}(\dot{a}) \times P \in M$ ist $s \in M$. s ist die Menge von kanonischen Namen für Teilmengen von a. Wir setzen $t :\equiv \{(\dot{y}, 1_P) \mid \dot{y} \in s\}$. Wegen $s \in M$ und $(\mathbf{Ers})^M$ ist $t \in M$: $t = \{z \in M \mid \exists \dot{y} \in s\ (z = (\dot{y}, 1_P))^M\}$.

(1) $\quad \mathcal{P}(a) \cap M[G] \subseteq t^G$.

BEWEIS. Sei $z \subseteq a$, $z \in M[G]$. Sei $\dot{z} \in M$ mit $\dot{z}^G = z$. Wir definieren einen „kanonischen Namen" für z durch $\dot{y} :\equiv \{(\dot{x}, p) \in \mathrm{dom}(\dot{a}) \times P \mid p \Vdash (\dot{x} \in \dot{z})\}$. Wegen $\mathrm{dom}(\dot{a}) \times P \in M$ und $(\mathbf{Aus})^M$ ist $\dot{y} \in M$. Folglich ist $\dot{y} \in s$ und somit $(\dot{y}, 1_P) \in t$, was

(1.1) $\quad \dot{y}^G \in t^G$

impliziert. Es verbleibt zu zeigen, daß $\dot{y}$ tatsächlich ein Name für z ist, daß also gilt

(1.2) $\quad \dot{z}^G = \dot{y}^G$.

Beweis von (1.2). zu „$\subseteq$". Sei $x \in \dot{z}^G$. Wegen $\dot{z}^G \subseteq a = \dot{a}^G$ ist dann auch $x \in \dot{a}^G$, so daß nach Definition von $\dot{a}^G$ ein Paar $(\dot{x}, q) \in \mathrm{dom}(\dot{a}) \times P$ mit $q \in G$ existiert, so daß $x = \dot{x}^G$ gilt. Wir haben dann $\dot{x}^G \in \dot{z}^G$, was auf $(\dot{x}^G \in \dot{z}^G)^{M[G]}$ führt. Nach dem Forcing-Theorem existiert ein $p \in G$ mit $p \Vdash (\dot{x} \in \dot{z})$. Dann ist $(\dot{x}, p) \in \dot{y}$. Wegen $p \in G$ folgt hieraus $\dot{x}^G \in \dot{y}^G$, was $x \in \dot{y}^G$ bedeutet. Dies war zu zeigen.
zu „$\supseteq$". Sei $x \in \dot{y}^G$. Dann existiert nach Definition von $\dot{y}^G$ und $\dot{y}$ ein Paar $(\dot{x}, p) \in \mathrm{dom}(\dot{a}) \times P$ mit $p \Vdash (\dot{x} \in \dot{z})$ und $p \in G$, so daß $x = \dot{x}^G$ ist. Aus $p \Vdash (\dot{x} \in \dot{z})$ folgt $(\dot{x}^G \in \dot{z}^G)^{M[G]}$ nach dem Forcing-Theorem. Letzteres ist mit $\dot{x}^G \in \dot{z}^G$, also $x \in \dot{z}^G$ gleichwertig. Dies war zu zeigen. qed(1.2)

Aus (1.1) und (1.2) folgt sofort $z \in t^G$; dies war zu zeigen. qed(1)

Da $z \subseteq a$ eine Σ_0-Formel ist, folgt aus (1): $\mathcal{P}(a) \cap M[G] = \{z \in t^G \mid z \subseteq a\} = \{z \in t^G \mid (z \subseteq a)^{M[G]}\}$. Wegen $(\mathbf{Aus})^{M[G]}$ ist die rechts stehende Klasse ein Element von $M[G]$. Dies war zu zeigen. QED

Satz 17.3 *Es gilt* $(\mathbf{Ers})^{M[G]}$.

Beweis. Sei $\varphi(u, v, \vec{w})$ eine $\in$-Formel. Seien $a, \vec{z} \in M[G]$, so daß

$(*) \qquad \forall x, y, y' \in M[G]\ ((\varphi(x, y, \vec{z})^{M[G]} \wedge \varphi(x, y', \vec{z})^{M[G]}) \longrightarrow y = y')$

gilt. Es ist zu zeigen, daß $s :\equiv \{y \in M[G] \mid \exists x \in a\ \varphi(x, y, \vec{z})^{M[G]}\} \in M[G]$ ist. Wegen $(\mathbf{Aus})^{M[G]}$ genügt es, ein $t \in M$ zu finden, so daß $s \subseteq t^G$ gilt. Sei $a = \dot{a}^G$, $\vec{z} = \vec{\dot{z}}^G$. Wähle mit Hilfe des Ersetzungsaxioms in M ein $S \in M$, so daß für alle $\dot{x} \in \mathrm{dom}(\dot{a})$ gilt

(1) $\qquad \forall p \in P\ \Big((\exists \dot{y} \in M\ p \Vdash \varphi(\dot{x}, \dot{y}, \vec{\dot{z}})) \longrightarrow \exists \dot{y} \in S\ p \Vdash \varphi(\dot{x}, \dot{y}, \vec{\dot{z}})\Big)$.

Sei nun $t :\equiv \{(r, 1) \mid r \in S\}$. Mit den üblichen Argumenten folgt $t \in M$. Wir zeigen $s \subseteq t^G$. Hierzu sei $y \in s$. Dann existiert ein $x \in a$ mit

(2) $\qquad \varphi(x, y, \vec{z})^{M[G]}$.

Wegen $x \in a = \dot{a}^G$ existiert ein Paar $(\dot{x}, q) \in \dot{a}$ mit $q \in G$, so daß $x = \dot{x}^G$ ist. Sei $\dot{y} \in M$ mit $y = \dot{y}^G$. (2) bedeutet dann

(3) $\qquad \varphi(\dot{x}^G, \dot{y}^G, \vec{\dot{z}}^G)^{M[G]}$.

Nach dem Forcing-Theorem existiert ein $p \in G$ mit $p \Vdash \varphi(\dot{x}, \dot{y}, \vec{\dot{z}})$. Nach (1) existiert ein $\dot{y}' \in S$ mit $p \Vdash \varphi(\dot{x}, \dot{y}', \vec{\dot{z}})$. Wegen $p \in G$ impliziert das Forcing-Theorem

$$\varphi(\dot{x}^G, \dot{y}^G, \vec{\dot{z}}^G)^{M[G]} \wedge \varphi(\dot{x}^G, \dot{y}'^G, \vec{\dot{z}}^G)^{M[G]},$$

was nach $(*)$ $\dot{y}^G = \dot{y}'^G$ impliziert. Da aus $\dot{y}' \in S$ folgt $\dot{y}'^G \in t^G$, haben wir $y = \dot{y}^G = \dot{y}'^G \in t^G$ nachgewiesen. Dies war zu zeigen. QED

Satz 17.4 *Es gilt* $\mathbf{ZF}^{M[G]}$.

Satz 17.5 *Sei N ein transitives* **ZF** *-Obermodell von M, das G als Element enthält; d.h., N ist ein transitiver Term mit $\mathbf{ZF}^N$, $M \subseteq N$ und $G \in N$. Dann gilt*
(a) $(\dot{x}^G)^N = \dot{x}^G \in N$ *für alle* $\dot{x} \in M$.
(b) Definiert man $\mathrm{int}_G \colon M \to V$ *durch* $\mathrm{int}_G(\dot{y}) :\equiv \dot{y}^G$, *so ist* $\mathrm{int}_G \upharpoonright x \in N$ *für alle* $x \in M$.

Beweis. zu (a). Wir zeigen dies durch eine Induktion über die Relation R aus **??**. Sei $\dot{x} \in M$ und für alle $\dot{y} R \dot{x}$ sei $(\dot{y}^G)^N = \dot{y}^G \in N$ gezeigt. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\dot{x}^G &= \{z \mid \exists p \in G\, \exists \dot{y}\, ((\dot{y}, p) \in \dot{x} \wedge z = \dot{y}^G)\} \\
&= \bigcup \Big\{ \{z \mid \exists p \in G\, \exists \dot{y}\, ((\dot{y}, p) = w \wedge z = \dot{y}^G)\} \;\Big|\; w \in \dot{x} \Big\} \\
&= \bigcup \Big\{ \{z \in N \mid \exists p \in G\, \exists \dot{y} \in N\, ((\dot{y}, p) = w \wedge z = (\dot{y}^G)^N)\} \;\Big|\; w \in \dot{x} \Big\} \quad \text{(nach Ind.Vor.)} \\
&= \bigcup \Big\{ \underbrace{\{z \in N \mid \exists p \in G\, (\exists \dot{y}\, ((\dot{y}, p) = w \wedge z = \dot{y}^G))^N\}}_{\in N \text{ wegen } (\mathbf{Ers})^N \text{ und } G \in N} \;\Big|\; w \in \dot{x} \Big\} \\
&= \bigcup \Big\{ v \in N \;\Big|\; \exists w \in \dot{x}\; v = \{z \in N \mid \exists p \in G\, (\exists \dot{y}\, ((\dot{y}, p) = w \wedge z = \dot{y}^G))^N\} \Big\} \\
&= \bigcup \underbrace{\Big\{ v \in N \;\Big|\; \exists w \in \dot{x}\, (v = \{z \mid \exists p \in G\, \exists \dot{y}\, ((\dot{y}, p) = w \wedge z = \dot{y}^G)\})^N \Big\}}_{\in N \text{wegen } (\mathbf{Ers})^N} \\
&\in N, \quad \text{wegen } (\textstyle\bigcup\textbf{-Ax})^N.
\end{aligned}$$

$(\dot{x}^G)^N = \dot{x}^G$ beweist man nun genau wie $(\dot{x}^G)^{M[G]} = \dot{x}^G$ im Beweis von **??**.
zu (b). Sei $x \in M$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{int}_G \upharpoonright x &= \{u \in N \mid \exists \dot{y} \in x\, \exists z \in N\, (z = \dot{y}^G \wedge u = (y, z))\} \quad (\text{wegen } \dot{y}^G \in N \text{ und } (\mathbf{Paar})^N) \\
&= \{u \in N \mid \exists \dot{y} \in x\, (\exists z\, (z = \dot{y}^G \wedge u = (y, z)))^N\} \quad (\text{wegen (a)}) \\
&\in N, \quad \text{wegen } (\mathbf{Ers})^N.
\end{aligned}$$

Damit ist der Satz vollständig bewiesen. QED

Als unmittelbare Folgerung erhalten wir:

Corollar 17.6 *$M[G]$ ist das $\subseteq$-kleinste transitive Modell N von* **ZF** *mit $M \subseteq N$ und $G \in N$.*

Beweis. Nach Teil (a) des Satzes ist für jedes solche N $\dot{x}^G \in N$ für alle $\dot{x} \in M$, also $M[G] \subseteq N$. Wegen $\mathbf{ZF}^{M[G]}$ ist also $M[G]$ das $\subseteq$-kleinste transitive **ZF**-Modell, das M erweitert und G als Element enthält. QED

Mit Hilfe von 17.5 zeigen wir außerdem, daß das Auswahlaxiom in $M[G]$ gilt.

Lemma 17.7 *Es gilt* $(\mathbf{AC})^{M[G]}$.

Beweis. Da bereits $\mathbf{ZF}^{M[G]}$ nachgewiesen ist, genügt es, eine unter **ZF** zu **(AC)** äquivalente Aussage zu beweisen. Hierzu zeigen wir zunächst

(1) $\quad \mathbf{ZF} \vdash (\mathbf{AC}) \longleftrightarrow \forall x \, \exists x' \, \exists \beta \in \mathrm{On} \, \exists f \; (x' \supseteq x \, \wedge \, f\colon \beta \xrightarrow{surj.} x')$.

Beweis. Nach 6.1 gilt:

$(*)$ $\quad \mathbf{ZF} \vdash (\mathbf{AC}) \longleftrightarrow \forall x \, \exists \beta \in \mathrm{On} \, \exists f \; f\colon \beta \xrightarrow{bij.} x$.

Hieraus folgt sofort „$\Rightarrow$“.

zu „$\Leftarrow$“. Sei $x' \supseteq x$ und $f\colon \beta \xrightarrow{surj.} x'$. Setze $u :\equiv \{\min f^{-1}[\{y\}] \mid y \in x\}$. Dann ist $u \subseteq \beta$ und $g :\equiv f \restriction u$ ist eine Bijektion $g\colon u \xrightarrow{bij.} x$. Sei γ der Mostowski-Kollaps von $(u, <)$ und $\pi\colon \gamma \xrightarrow{bij.} u$ die Inverse des Mostowski-Isomorphismus' von $(u, <)$. Dann ist $g \circ \pi\colon \gamma \xrightarrow{bij.} x$. Also ist die rechte Seite von $(*)$ erfüllt. qed(1)

$(\mathbf{AC})^{M[G]}$ ist also gezeigt, wenn wir verifizieren:

(2) $\quad (\forall x \, \exists x' \, \exists \beta \in \mathrm{On} \, \exists f \; (x' \supseteq x \, \wedge \, f\colon \beta \xrightarrow{surj.} x'))^{M[G]}$.

Beweis. Die zu zeigende Behauptung ist wegen $\mathrm{On}^{M[G]} = \mathrm{On}^M = \mathrm{On} \cap M$ (siehe 15.12) und der $M[G]$-V-Absolutheit von $x \subseteq x'$ und $f\colon \beta \xrightarrow{surj.} x'$ (siehe **??**) gleichwertig mit

$$\forall x \in M[G] \, \exists x' \in M[G] \, \exists \beta \in \mathrm{On} \cap M \, \exists f \in M[G] \; (x' \supseteq x \, \wedge \, f\colon \beta \xrightarrow{surj.} x').$$

Sei also $x \in M[G]$. Sei $\dot{x} \in M$ mit $x = \dot{x}^G$. Da $\mathbf{ZFC}^M$ gilt, folgt aus $(*)$: $(\exists g \, \exists \beta \in \mathrm{On} \; g\colon \beta \xrightarrow{bij.} \mathrm{dom}(\dot{x}))^M$. Wegen $(g\colon \beta \xrightarrow{bij.} \mathrm{dom}(\dot{x}))^M \iff g\colon \beta \xrightarrow{bij.} \mathrm{dom}(\dot{x})$ bedeutet dies $\exists g \in M \, \exists \beta \in \mathrm{On} \cap M \; g\colon \beta \xrightarrow{bij.} \mathrm{dom}(\dot{x})$. Sei also $\beta \in \mathrm{On} \cap M$ und $g \in M$ mit $g\colon \beta \xrightarrow{bij.} \mathrm{dom}(\dot{x})$. Nach 17.5 ist $h :\equiv \mathrm{int}_G \restriction \mathrm{dom}(\dot{x}) \in M[G]$. Also ist $x' :\equiv \mathrm{ran}(h) \in M[G]$; nach Definition von $\dot{x}^G$ ist $\dot{x}^G \subseteq x'$. Sei $f :\equiv h \circ g$. Es ist $\mathrm{ran}(f) = \mathrm{ran}(h) = x'$. Es verbleibt also, $f \in M[G]$ zu zeigen. Hierzu:

$$\begin{aligned} h \circ g &= \{z \in \mathrm{dom}(g) \times \mathrm{ran}(h) \mid \exists u, v, w \, ((u,v) \in g \, \wedge \, (v,w) \in h \, \wedge \, z = (u,w))\} \\ &= \{z \in \mathrm{dom}(g) \times \mathrm{ran}(h) \mid \exists u, v, w \in M[G] \, ((u,v) \in g \, \wedge \, (v,w) \in h \, \wedge \, z = (u,w))\} \\ &\quad \text{(wegen } g, h \in M[G]) \\ &= \{z \in \mathrm{dom}(g) \times \mathrm{ran}(h) \mid (\exists u, v, w \, ((u,v) \in g \, \wedge \, (v,w) \in h \, \wedge \, z = (u,w)))^{M[G]}\} \in M[G] \\ &\quad \text{(wegen } (\mathbf{Aus})^{M[G]}). \end{aligned}$$

x', β und f sind also wie benötigt. qed(2)

Damit ist das Lemma bewiesen. QED

Aus 17.6 und 17.7 folgt sofort:

Satz 17.8 *$M[G]$ ist ein abzählbares, transitives Modell von* **ZFC**. *Es ist das $\subseteq$-kleinste transitive* **ZFC**-*Obermodell von M, das G als Element enthält.*

18 Ein Modell für die Kontinuums-Hypothese

Zu Beginn der Entwicklung der Mengenlehre zeigte Georg Cantor, dass die Menge der reellen Zahlen überabzählbar ist (Satz 1.1). Ihre Kardinalität lässt sich kardinalzahlarithmetisch ausdrücken als

$$\overline{\overline{\mathbb{R}}} = 2^{\aleph_0}.$$

Cantor vermutete, dass die Kardinalität der Menge der reellen Zahlen die kleinste überabzählbare Kardinalzahl ist, d.h. dass $\overline{\overline{\mathbb{R}}} = \aleph_1$. Wir wollen in diesem Kapitel durch Forcing ein Modell der Mengenlehre konstruieren, in dem diese Kontinuumshypothese, abgekürzt **CH**gilt.
Als Forcing-Halbordnung wird die Menge aller abzählbaren Approximationen an eine Surjektion von $\aleph_1$ auf $\mathcal{P}(\omega)$ verwendet. In der generischen Erweiterung existiert dann eine solche Surjektion von der Zahl $\aleph_1$ *des Grundmodells* auf die Menge $\mathcal{P}(\omega)$ *des Grundmodells*. Es bleibt zu zeigen, dass in der betrachteten Situation $\aleph_1$ und $\mathcal{P}(\omega)$ zwischen Grundmodell und Erweiterung absolut sind.
Wir fixieren ein Grundmodell M. Definiere eine Forcing-Halbordnung $P = (P, \leq, 1_P)$ in M:
Es sei $P :\equiv \operatorname{Fn}(\aleph_1, \mathcal{P}(\omega), \aleph_1)^M = \{p \in M \mid p\colon \operatorname{dom}(p) \to \mathcal{P}(\omega) \wedge \operatorname{dom} \subseteq \aleph_1 \wedge \overline{\overline{p}}^M < \aleph_1\}$ die Menge aller abzählbaren partiellen Funktionen von $\aleph_1$ in $\mathcal{P}(\omega)$, gebildet im Grundmodell M. Definiere die Halbordnung auf P durch: $p \leq q :\equiv p \supseteq q$, und $1_P :\equiv \emptyset$.
Sei G ein P-generischer Filter über M mit zugehöriger generischer Erweiterung $M[G]$. Wir wissen bereits, dass $M[G] \models$ **ZFC**, und wir wollen zeigen, dass $M[G] \models$ **CH**.

Lemma 18.1 $\exists f \in M[G]\ f\colon \aleph_1^M \xrightarrow{surj.} \mathcal{P}(\omega)^M$.

BEWEIS. Sei $f :\equiv \bigcup G$. Es ist $f \in M[G]$ wegen $(\bigcup\text{-}\mathbf{Ax})^{M[G]}$.

(1) $f\colon \aleph_1^M \to \mathcal{P}(\omega)^M$.

BEWEIS. Da die Elemente von G paarweise kompatible partielle Funktionen $p\colon \aleph_1^M \supset\!\!\to \mathcal{P}(\omega)^M$ sind, folgt $f\colon \aleph_1^M \supset\!\!\to \mathcal{P}(\omega)^M$. Um $\operatorname{dom}(f) = \aleph_1^M$ zu verifizieren, betrachte $\alpha < \aleph_1^M$; es ist $\alpha \in \operatorname{dom}(f)$ zu zeigen. Setze hierzu

$$D :\equiv \{p \in P \mid \alpha \in \operatorname{dom}(p)\}.$$

Wegen $D = \{p \in P \mid (\alpha \in \operatorname{dom}(p))^M\}$ ist $D \in M$ nach $(\mathbf{Aus})^M$. D ist dicht in P. Um dies zu sehen, fixiere $p \in P$. Ist $\alpha \in \operatorname{dom}(p)$, so ist $p \in D$ und wir sind fertig. Ist $\alpha \notin \operatorname{dom}(p)$, so setze $q :\equiv p \cup \{(\alpha, g)\}$, wobei $g \in ({}^{\omega}2)^M$ beliebig ist, etwa die Nullfunktion: $g(n) = 0$ für alle $n < \omega$. Offenbar ist $q \in P$ und $q \leq p$; ferner gilt $q \in D$. Also ist D Element von M und dicht in P. Da G generisch über M ist, existiert $p \in G \cap D$. Dann ist $p \subseteq f$ und es gilt $\alpha \in \operatorname{dom}(p) \subseteq \operatorname{dom}(f)$. Dies war zu zeigen. qed(1)

(2) $\operatorname{ran}(f) = \mathcal{P}(\omega)^M$.

BEWEIS. Sei $z \in \mathcal{P}(\omega)^M = \mathcal{P}(\omega) \cap M$. Es ist $z \in \operatorname{ran}(f)$ zu zeigen. Die Menge

$$D :\equiv \{p \in P \mid z \in \operatorname{ran}(p)\}$$

ist ein Element von M. Um zu sehen, daß D dicht in P ist, betrachte $p \in P$. Wegen $\overline{\overline{p}}^M < \aleph_1^M$ kann p nicht jedem $\alpha < \aleph_1^M$ einen Wert zuweisen. Also existiert $\alpha < \aleph_1^M$ mit $\alpha \notin \operatorname{dom}(p)$. Sei $q :\equiv p \cup \{(\alpha, z)\}$. Dann gilt $q\colon \aleph_1^M \supset\!\!\!\rightarrow \mathcal{P}(\omega)^M$, $\overline{\overline{q}}^M < \aleph_1^M$ und $q \leq p$. Ferner ist $q \in D$. Also ist D in der Tat dicht in P. Da G ein P-generischer Filter über M ist, existiert $p \in G \cap D$. Dann ist $p \subseteq f$ und es gilt $z \in \operatorname{ran}(p) \subseteq \operatorname{ran}(f)$. Dies war zu zeigen. qed(2)

Für den Absolutheitsbeweis von $\aleph_1$ und $\mathcal{P}(\omega)$ zwischen M und $M[G]$ brauchen wir einige Vorbereitungen:

Definition 18.2 Sei $(P, \leq, 1_P)$ eine Forcing-Halbordnung. P ist **μ-abgeschlossen** $:\equiv \forall \lambda < \mu \; \forall p \in {}^\lambda P \; \exists q \in P \; \Big(\forall i, j \in \lambda \; (i < j \to p(j) \leq p(i)) \longrightarrow \forall i < \lambda \; q \leq p(i)\Big)$. P ist **abzählbar abgeschlossen**, falls P $\aleph_1$-abgeschlossen ist.

Bemerkung 18.3 P ist also genau dann abzählbar abgeschlossen, wenn jede abzählbare absteigende $\leq$-Kette in P eine untere Schranke in P hat.

Die oben definierte Forcing-Halbordnung$(P, \leq, 1_P)$ ist, im Grundmodell M, abzählbar abgeschlossen, denn die Vereinigung einer abzählbaren Menge paarweise kompatibler Funktionen aus P ist wieder ein Element von P und eine gemeinsame untere Schranke der Menge.
Es gilt nun der folgende wichtige Erhaltungssatz:

Lemma 18.4 *Für $a, b \in M$ mit $\overline{\overline{a}}^M < \aleph_1^M$ und $h \in M[G]$ mit $h\colon a \to b$ ist $h \in M$.*

BEWEIS. Es genügt, den Spezialfall $a = \omega$ zu betrachten. Wähle einen Namen $\dot{h} \in M$ mit $\dot{h}^G = h$. $M[G] \models \dot{h}^G : \check{\omega}^G \to b = \check{b}^G$. Wähle eine Bedingung $p \in G$ mit $p \Vdash \dot{h} : \check{\omega} \to \check{b}$. Wir arbeiten mit einem Dichtheitsargument:

(1) Die Menge $D :\equiv \{q \mid \exists f \in M \; q \Vdash \dot{h} = \check{f}\}$ ist dicht in P unter p.

BEWEIS. Betrachte $r \leq p$. Arbeite in M und definiere eine Funktion $f : \omega \to b$ und eine Folge $(r_i | \, i < \omega)$ von Bedingungen durch eine gemeinsame Rekursion: Für alle $n < \omega$ gilt $r \Vdash \exists z \in \check{b} \; \dot{h}(\check{n}) = z$. Nach dem Satz über das Erzwingen von beschränkt quantifizieren Formeln können wir ein $r_0 \leq r$ und ein $f(0) \in b$ wählen mit $r_0 \Vdash \dot{h}(\check{0}) = (f(0))\check{}$. Rekursiv wähle entsprechend $r_{n+1} \leq r_n$ und $f(n{+}1) \in b$ mit $r_{n+1} \Vdash \dot{h}((n{+}1)\check{}) = (f(n{+}1))\check{}$. Dann ist $(r_n | n < \omega)$ eine absteigende ω-Folge in P, und wegen der abzählbaren Abgeschlossenheit von P gibt es ein $q \in P$ mit $\forall n \; q \leq r_n$. $q \Vdash \dot{h} : \check{\omega} \to \check{b}$ und für alle $n < \omega$, $q \Vdash \dot{h}(\check{n}) = (f(n))\check{} = \check{f}(\check{n})$. $q \Vdash \forall m \in \check{\omega} \; \dot{h}(\check{m}) = \check{f}(m)$ und $q \Vdash \dot{h} = \check{f}$. qed(1)

Da G generisch ist und $p \in G$, gibt es ein $q \in G \cap D$. Wähle $f \in M$ mit $q \Vdash \dot{h} = \check{f}$. Dann ist $h = \dot{h}^G = \check{f}^G = f \in M$. QED

Lemma 18.5 $\aleph_1^M = \aleph_1^{M[G]}$.

Beweis. Wir zeigen, dass $\aleph_1^M$ eine Kardinalzahl in $M[G]$ ist. Falls nicht, so gibt es eine Ordinalzahl $\alpha < \aleph_1^M$ und eine Bijektion $h : \alpha \leftrightarrow \aleph_1^M$, $h \in M[G]$. Nach dem vorangehenden Lemma ist $h \in M$, und wir haben: $M \models h : \alpha \leftrightarrow \aleph_1^M$. Daraus würde folgen $M \models \aleph_1^M$ ist keine Kardinalzahl, Widerspruch. QED

Lemma 18.6 $\mathcal{P}(\omega)^M = \mathcal{P}(\omega)^{M[G]}$.

Beweis. Betrachte $x \subseteq \omega$, $x \in M[G]$. Es genügt zu zeigen, dass $x \in M$. Sei $h : \omega \to \{0,1\}$ die charakteristische Funktion von x: $h(n) = 1$ gdw. $n \in x$. Wegen der Absolutheit der Definition ist $h \in M[G]$. Nach dem obigen Lemma ist $h \in M$. Dann aber ist $x = h^{-1}[1] \in M$. QED

Zusammen erhalten wir: $f \colon \aleph_1^{M[G]} \xrightarrow{surj.} \mathcal{P}(\omega)^{M[G]}$. QED

Das Lemma besagt aber gerade, dass in $M[G]$ die Cantorsche Kontinuumshypothese erfüllt ist.

Lemma 18.7 *Sei T_0 eine endliche Teilmenge des Systems* $\mathbf{ZFC}$. *Dann gilt* $\mathbf{ZFC} \models \mathrm{Kons}(T_0 + \mathbf{CH})$.

Beweis. Betrachte eine endliche Teilmenge $T_1 \subseteq \mathbf{ZFC}$, die groß genug für die nachfolgende Konstruktion ist. Nach dem allgemeinen Reflektionssatz 12.8 gibt es eine Ordinalzahl θ, so dass alle Axiome $\varphi \in T_1$ $V_\theta - V$-absolut sind. Da die Axiome in V gelten, ist $(V_\theta, \in) \models T_1$. Nach dem Auswahlaxiom sei $\prec$ eine Wohlordnung von V_θ. Für jede $\in$-Formel $\varphi(\vec{v})$ definiere eine Skolem-Funktion $F_\varphi \colon V_\theta^r \to V_\theta$ durch: $F_\varphi(x_1, \ldots, x_r) :\equiv$ das $\prec$-minimale Element $y \in V_\theta$ mit $(V_\theta, \in) \models \psi(y, x_1, \ldots, x_r)$, falls $\varphi \equiv \exists v_0 \psi(v_0, v_1, \ldots, v_r)$ und ein derartiges y existiert, und $F_\varphi(x_1, \ldots, x_r) :\equiv 0$ sonst.
Sei N die $\subseteq$-kleinste Teilmenge von V_θ, die gegenüber den Funktionen F_φ abgeschlossen ist. Da die Menge der $\in$-Formeln abzählbar ist, ist N abzählbar.
Wir zeigen nun durch Induktion nach dem Formelaufbau, dass jede Formel φ $N - V_\theta$-absolut ist.
Fall 1. Atomare Formeln sind trivialerweise absolut.
Fall 2. $\varphi \equiv (\psi \wedge \chi)$ oder $\varphi \equiv \neg\psi$. Nach Induktionsvoraussetzung sind ψ und χ $N - V_\theta$-absolut. Da aussagenlogische Verknüpfungen absoluter Formeln wieder absolut sind, ergibt sich die Behauptung.
Fall 3. $\varphi \equiv \exists v_0 \psi$. Da nach Induktionsvoraussetzung ψ $N - V_\theta$-absolut ist, folgt für alle $\vec{x} \in N$:

$$V_\theta \models \varphi(\vec{x}) \longleftrightarrow \exists v \in V_\theta\, V_\theta \models \psi(v, \vec{x}) \longleftrightarrow \exists v \in N\, V_\theta \models \psi(v, \vec{x}) \longleftrightarrow$$

(4) $\exists f \in M[G] \;\; f\colon (\kappa^+)^{M[G]} \overset{surj.}{\longrightarrow} ({}^{\kappa}2)^{M[G]}$.

Analog zu (2) beweist man:

(5) (a) Für $i < n+1$ ist $\aleph_i^M = \aleph_i^{M[G]}$ und $({}^{\aleph_i}2)^M = ({}^{\aleph_i}2)^{M[G]}$. Ferner ist $\aleph_\omega^M = \aleph_\omega^{M[G]}$.
(b) $(\kappa^+)^{M[G]} = \aleph_{\omega+1}^{M[G]}$.

Analog zu (3), Fall „$i < n$“ beweist man:

(6) Für $i < n+1$ gilt $(2^{\aleph_i} = \aleph_{i+1})^{M[G]}$.

Analog zu (3), Fall „$i = n$“ zeigt man:

(7) $(2^{\aleph_\omega} = \aleph_{\omega+1})^{M[G]}$.

Aus (6) und (7) folgt $(\mathbf{ZFC} + 2^{\aleph_0} = \aleph_1 + \cdots + 2^{\aleph_n} = \aleph_{n+1} + 2^{\aleph_\omega} = \aleph_{\omega+1})^{M[G]}$, und dies war zu zeigen. QED

Bemerkung 18.11 Mit dem hier präsentierten Forcing lassen sich analog zu 18.10 weitere relative Konsistenzresultate gewinnen. Ist etwa κ ein „geeigneter“ Klassenterm, so erhält man

$$\mathrm{Kon}(\mathbf{ZF}) \longrightarrow \mathrm{Kon}(\mathbf{ZFC} + 2^\kappa = \kappa^+).$$

(Der Leser überlege sich zur Übung, welche Eigenschaften der Term κ erfüllen muß, um „geeignet“ zu sein.) Mit einem Produkt verschiedener Bedingungsmengen kann man für „geeignete“ Kardinalzahlterme χ

$$\mathrm{Kon}(\mathbf{ZF}) \longrightarrow \mathrm{Kon}(\mathbf{ZFC} + \forall i < \chi \; 2^{\aleph_i} = \aleph_{i+1})$$

beweisen. Das hier präsentierte Forcing versagt jedoch beim Versuch,

$$\mathrm{Kon}(\mathbf{ZF}) \longrightarrow \mathrm{Kon}(\mathbf{ZFC} + \mathbf{GCH})$$

zu verifizieren, da hierbei **alle** Ordinalzahlen berücksichtigt werden müssen. Hierzu ist ein **Klassenforcing** notwendig: Man verwendet eine Klasse P von Bedingungen; der generische Filter schneidet jede definierbare, dichte Teilklasse dieser Bedingungsklasse. Der auf GÖDEL zurückgehende Beweis der relativen Konsistenz von **GCH** arbeitet ohne Forcingkonstruktion m.H. des inneren Modells L der konstruktiblen Mengen.

19 Ein Modell für $\neg$CH

In diesem Kapitel definieren wir generische Erweiterungen, in denen die Cantorsche Kontinuumshypothese verletzt ist. Durch eine geeignete Forcing-Halbordnung werden zu einem Grundmodell viele reelle Zahlen adjungiert, ohne die Kardinalzahlstruktur des Grundmodells zu verändern. Unter einer reellen Zahl verstehen wir hier eine Funktion $c\colon \omega \to 2$.

Sei also M ein Grundmodell und $\kappa \in \mathrm{Card}^M$. Definiere die Forcing-Halbordnung $(P, \leq, 1_P)$ durch:

$$P = \mathrm{Fn}(\kappa \times \omega, 2, \aleph_0) = \{p \mid p\colon \mathrm{dom}(p) \to 2,\ \mathrm{dom}(p) \subseteq \kappa \times \omega,\ \overline{\overline{p}} < \aleph_0\};$$

Wie zuvor definiere die Halbordnung auf P durch: $p \leq q :\equiv p \supseteq q$, und $1_P :\equiv \emptyset$.
Sei G ein P-generischer Filter über M mit zugehöriger generischer Erweiterung $M[G]$. Wir wissen bereits, dass $M[G] \models$ **ZFC**, und wir wollen zeigen, dass $M[G] \models \neg$**CH**. Wir zeigen zunächst, dass es in M[G]κ paarweise verschiedene reelle Zahlen gibt. Arbeiten in $M[G]$. Sei $f :\equiv \bigcup G$.

(1) $\quad f\colon \kappa \times \omega \to 2$.

Beweis. Da die Elemente von G paarweise kompatible partielle Funktionen $p\colon \kappa\times\omega \supset\!\!\to 2$ sind, folgt $f\colon \kappa\times\omega \supset\!\!\to 2$. Um $\mathrm{dom}(f) = \kappa\times\omega$ zu verifizieren, fixiere $(\alpha, n) \in \kappa\times\omega$ beliebig. Wir arbeiten in V, um $(\alpha, n) \in \mathrm{dom}(f)$ zu beweisen. Die Menge

$$D :\equiv \{p \in P \mid (\alpha, n) \in \mathrm{dom}(p)\}$$

ist wegen $(\alpha, n) \in \mathrm{dom}(p) \iff ((\alpha, n) \in \mathrm{dom}(p))^M$ nach $(\mathbf{Aus})^M$ ein Element von M. D ist dicht in P. Um dies zu sehen, sei $p \in P$ beliebig. Ist $(\alpha, n) \in \mathrm{dom}(p)$, so sind wir fertig. Ist $(\alpha, n) \notin \mathrm{dom}(p)$, so setzte $q :\equiv p \cup \{((\alpha, n), 0)\}$. Dann gilt $q \in P$ und $q \leq p$. Ferner ist $q \in D$. Also ist D dicht in P. Sei $p \in G \cap D$. Dann ist $p \subseteq f$ und es folgt $(\alpha, n) \in \mathrm{dom}(p) \subseteq \mathrm{dom}(f)$. Wegen der Absolutheit der Formel $(\alpha, n) \in \mathrm{dom}(f)$ folgt $((\alpha, n) \in \mathrm{dom}(f))^{M[G]}$; dies war zu zeigen. qed(1)

Für $\alpha < \kappa$ definiere

$$c_\alpha :\equiv (f(\alpha, n) \mid n < \omega).$$

Nach (1) ist $c_\alpha \in {}^\omega 2$. Diese Cohen-Zahlen sind paarweise verschieden:

(2) $\quad \forall \alpha < \beta < \kappa\ \exists n < \omega\ c_\alpha(n) \neq c_\beta(n)$.

Beweis. Es ist die Existenz eines $n < \omega$ zu zeigen, so daß $f(\alpha, n) \neq f(\beta, n)$ ist. Hierzu arbeiten wir in V. Sei

$$D :\equiv \left\{p \in P \,\middle|\, \exists n < \omega\ ((\alpha, n) \in \mathrm{dom}(p) \wedge (\beta, n) \in \mathrm{dom}(p) \wedge p(\alpha, n) \neq p(\beta, n))\right\}.$$

Man sieht leicht, daß die definierende Formel von D ohne Veränderung der Aussage auf M relativiert werden kann; z.B. gilt im Fall (α, n), $(\beta, n) \in \mathrm{dom}(p)$:

$$(p(\alpha, n) \neq p(\beta, n))^M \overset{\mathbf{??}}{\iff} (p(\alpha, n))^M \neq (p(\beta, n))^M \overset{\mathbf{??}}{\iff} p^M(\alpha, n) \neq p^M(\beta, n)$$
$$\iff p(\alpha, n) \neq p(\beta, n).$$

Nach $(\mathbf{Aus})^M$ gilt also $D \in M$. D ist dicht in P. Um dies zu sehen, fixiere $p \in P$ beliebig. Wegen $(\overline{\overline{p}} < \aleph_0)^M$ und $(\overline{\overline{\kappa \times \omega}} = \overline{\overline{\kappa}} \cdot \aleph_0 \geq \aleph_0)^M$ existiert ein $n < \omega$ mit $(\alpha, n) \notin \mathrm{dom}(p)$ und $(\beta, n) \notin \mathrm{dom}(p)$. Sei

$$q :\equiv p \cup \{((\alpha, n), 0), ((\beta, n), 1)\}.$$

Dann ist q eine partielle Funktion von $\kappa \times \omega$ nach 2, ferner $q \in M$ und $\overline{\overline{q}}^M < \aleph_0$. Es gilt $q \leq p$ und $q \in D$. Also ist D in der Tat dicht in P. Sei nun $p \in G \cap D$. Dann gilt $p \subseteq f$. Wähle $n < \omega$ mit $(\alpha, n), (\beta, n) \in \mathrm{dom}(p)$ und $p(\alpha, n) \neq p(\beta, n)$. Dann gilt

$$f(\alpha, n) = p(\alpha, n) \neq p(\beta, n) = f(\beta, n).$$

Hieraus folgt $(f(\alpha, n) \neq f(\beta, n))^{M[G]}$; dies war zu zeigen. qed(2)

Im Modell M[G] gilt daher:

$$2^{\aleph_0} = \overline{\overline{{}^{\omega}2}} \geq \overline{\overline{\{c_\alpha \mid \alpha < \kappa\}}} \overset{(2)}{=} \overline{\overline{\kappa}} \overset{(*)}{=} \kappa.$$

Im Fall $\kappa = \aleph_2^M$ ist damit aber noch nicht die Negation der Kontinuumshypothese in M[G] gezeigt, da es denkbar wäre, dass die Kardinalzahl $\aleph_2$ des Grundmodells kleiner als die Kardinalzahl $\aleph_2$ der generischen Erweiterung ist. Tatsächlich aber sind bei der vorgestellten Konstruktion Kardinalzahlen absolut zwischen M und M[G]. Hierfür zeigen wir, dass die benutzte Forcing-Halbordnung eine bestimmte kombinatorische Eigenschaft hat, die die Absolutheit der Kardinalzahlen impliziert.

19.1 Kombinatorische Eigenschaften von *P*

Die Kardinalzahlstruktur eines Modells wird durch die Klasse der Abbildungen $f : \alpha \to \beta$ bestimmt. Angenommen, $\dot{f}^G : \alpha \to \beta$ und $1_P \Vdash \dot{f} : \check{\gamma} \to \check{\delta}$. Falls $p \Vdash \dot{f}(\check{\alpha}) = \beta_0$, $q \Vdash \dot{f}(\check{\alpha}) = \beta_1$, und $\beta_0 \neq \beta_1$, so sind die Bedingungen p und q inkompatibel, $p \perp q$. Wenn wir unter einem *potentiellen Wert* von $\dot{f}(\check{\alpha})$ ein β verstehen, für das es eine Bedingung p mit $p \Vdash \dot{f}(\check{\alpha}) = \beta$ gibt, so führt eine große Menge von potentiellen Werten zu einer ebenso großen *Antikette* in P, d.h. zu einer Menge von paarweise unverträglichen Bedingungen. Auf diese Weise lässt sich der Wertebereich von $\dot{f}$ schon im Grundmodell beschränken.

Definition 19.1 Sei $(P, \leq, 1_P)$ eine Forcing-Halbordnung und $\kappa \in \mathrm{Card}$. Wir definieren:

(a) A ist eine **Antikette** in $P :\equiv A \subseteq P \wedge \forall p, q \in A\ (p \neq q \longrightarrow p \perp q)$.

(b) A ist **maximale Antikette** in P
$:\equiv A$ ist Antikette in $P \wedge \forall A'(A' \supseteq A \wedge A'$ ist Antikette in $P \longrightarrow A' = A)$.

(c) $(P, \leq, 1_P)$ hat die **κ-Antiketten-Eigenschaft** $:\equiv \forall A\ (A$ ist Antikette in $P \longrightarrow \overline{\overline{A}} < \kappa)$.

(d) $(P, \leq, 1_P)$ hat die **abzählbare Antiketten-Eigenschaft** $:\equiv (P, \leq, 1_P)$ hat die $\aleph_1$-Antiketten-Eigenschaft.

Satz 19.2 *Für alle Mengen X besitzt die Halbordnung $\mathrm{Fn}(X, 2, \aleph_0)$ die abzählbare Antiketten-Eigenschaft.*

BEWEIS. Angenommen, A sei eine überabzählbare Antikette in $\mathrm{Fn}(X, 2, \aleph_0)$. Da die Vereinigung von abzählbar vielen höchstens abzählbaren Mengen höchstens abzählbar ist, gibt es ein $n < \omega$ und ein überabzählbares $A' \subseteq A$, so dass $\forall p \in A' \overline{\overline{p}} = n$. Wähle ein bezüglich der Inklusion maximales $r \in \mathrm{Fn}(X, 2, \aleph_0)$, so dass es ein überabzählbares $A'' \subseteq A'$ gibt mit $\forall p \in A'' \, r \subseteq p$. Wähle ein beliebiges $p_0 \in A''$. Wegen der Maximalität von r können wir für jedes $x \in \mathrm{dom}(p_0 \setminus r)$ ein höchstens abzählbares $B_x \subseteq A''$ wählen, so dass $\forall p \in A'' \setminus B_x \; x \notin \mathrm{dom}(p)$. Setze $B = \bigcup_{x \in \mathrm{dom}(p_0 \setminus r)} B_x$. Für alle $p \in A'' \setminus B$ gilt dann $\mathrm{dom}(p) \cap \mathrm{com}(p_0) = \mathrm{dom}(r)$ und $p \cup p_0$ ist eine Bedingung in $\mathrm{Fn}(X, 2, \aleph_0)$. Dann aber sind p und p_0 verschieden und kompatibel, obwohl A eine Antikette in $\mathrm{Fn}(X, 2, \aleph_0)$ ist. Widerspruch. QED

Wir können nun eine "Überdeckungseigenschaft" für Funktionen zeigen, die besagt, dass wir Funktionen der generischen Erweiterung im Grundmodell bis auf abzählbare Abweichungen approximieren können.

Satz 19.3 *Seien $a, b \in M$ und $f \in M[G]$, $f\colon a \to b$. Dann gibt es eine Funktion $F \in M$, $F\colon a \to \mathcal{P}(b)$, so dass*

(a) $\forall x \in a \; f(x) \in F(x)$;

(b) $\forall x \in a \; \overline{\overline{F(x)}} \leq \aleph_0$.

BEWEIS. Wähle einen Namen $\dot{f} \in M$ mit $\dot{f}^G = f$. Wähle ein $p \in G$ mit $p \Vdash \dot{f}\colon \check{a} \to \check{b}$. Definiere $F\colon a \to \mathcal{P}(b)$ durch $F(x) = \{y \in b \,|\, \exists q \leq p \; q \Vdash \dot{f}(x) = \check{y}\}$. Wegen der Definierbarkeit der Forcing-Relation in M ist $F \in M$.

(a) Betrachte $x \in a$. Sei $f(x) = y$. Dann gibt es ein $q \in G$, $q \leq p$ mit $q \Vdash \dot{f}(x) = \check{y}$. Nach Definition von F ist dann $f(x) \in F(x)$.

(b) Betrachte $x \in a$. For all $y \in F(x)$ wähle eine Bedingung $p_y \leq p$ mit $p_y \Vdash \dot{f}(x) = \check{y}$.

(1) Für $y, z \in F(x)$, $y \neq z$ ist $p_y \perp p_z$.

BEWEIS. Angenommen, es wäre $q \leq p_y, p_z$. Dann $q \Vdash \dot{f}(x) = \check{y}$, $q \Vdash \dot{f}(x) = \check{z}$ und $q \Vdash \dot{f}\colon \check{a} \to \check{b}$. Also $q \Vdash \check{y} = \check{z}$ und $y = z$, Widerspruch. qed(1)

Damit ist die Abbildung $y \mapsto p_y$ eine Injektion von $F(x)$ in die Antikette $\{p_y \,|\, y \in F(x)$. Nach dem vorangehenden Satz ist $\{p_y \,|\, y \in F(x)$ höchstens abzählbar, also $\overline{\overline{F(x)}} \leq \aleph_0$. QED

Satz 19.4 *Angenommen, die Forcing-Halbordnung P besitzt die abzählbare Antiketten-Eigenschaft. Dann ist die Formel "β ist eine Kardinalzahl" absolut zwischen M und $M[G]$.*

BEWEIS. Wenn $M[G] \models$"β ist eine Kardinalzahl", so ist auch $M \models$"β ist eine Kardinalzahl", da die Menge der Abbildungen von β nach β in M der in $M[G]$ vorhandenen Abbildungen ist.

Betrachte nun den Fall, dass $M[G] \models$"β ist **keine** Kardinalzahl". Wähle ein $\alpha < \beta$ und eine Surjektion $f\colon \alpha \to \beta$. Dann ist $\alpha > \omega$. Nach dem vorangehenden Satz können wir eine Funktion $F \in M$ wählen mit $F\colon \alpha \to \mathcal{P}(\beta)$ und

(a) $\forall x \in \alpha\ f(x) \in F(x)$;

(b) $\forall x \in \alpha\ \overline{\overline{F(x)}}^M \leq \aleph_0$.

Da f surjektiv ist, gilt: $\beta \subseteq \bigcup_{x \in \alpha} F(x)$ und $\overline{\overline{\beta}}^M \leq \sum_{x \in \alpha} \aleph_0 \leq \overline{\overline{\alpha}}^M \aleph_0 \leq \overline{\overline{alpha}}^M \leq \alpha$. Also $M \models$"β ist **keine** Kardinalzahl". QED

Wenn wir nun die obige Forcing-Halbordnung $\mathrm{Fn}(\kappa \times \omega, 2, \aleph_0)$ mit $\kappa = \aleph_2^M$ vornehmen, so gilt für eine generische Erweiterung M[G]:

$$(2^{\aleph_0})^{M[G]} \geq \kappa = \aleph_2^M = \aleph_2^{M[G]}.$$

Damit ist M[G] ein Modell der Negation der Kontinuums-Hypothese. Wir erhalten als relatives Konsistenzresultat:

Satz 19.5 (Cohen) *Wenn* **ZFC** *konsistent ist, so ist auch das System* **ZFC** + $\neg$**CH** *konsistent*

20 Die relative Konsistenz von $\neg$ (AC).

Um Kon(**ZFC**) $\longrightarrow$ Kon(**ZF** + $\neg$ (**AC**)) zu beweisen, haben wir nach **??** **ZFC** und die Existenz eines Grundmodells M vorauszusetzen und die Existenz eines Termes M' zu verifizieren, so daß $(\mathbf{ZF} + \neg(\mathbf{AC}))^{M'}$ gilt. Bisher war stets M' eine gewisse generische Erweiterung von M. Dies ist in dem nun zu behandelnden Fall nicht möglich, da in jeder generischen Erweiterung von M das Auswahlaxiom gilt. Wir wählen für M' eine geeignete Teilklasse einer geeigneten generischen Erweiterung von M.
Beim Nachweis der relativen Konsistenz von (**AC**) haben wir das innere Modell HOD der erblich ordinalzahldefinierbaren Mengen betrachtet, siehe 13.5. Wir verallgemeinern diese Konstruktion wie folgt. Sei A ein Term mit $A \in V$. Sei

$$\mathrm{OD}(A) :\equiv \Big\{x \,\Big|\, \exists \theta \in \mathrm{On}\ \exists \chi \in \mathrm{Fml}_4(\dot\in)\, \exists \alpha < \theta\, \exists z \in {}^{<\omega}A \quad (x \in V_\theta \wedge z \in V_\theta \wedge A \in V_\theta \wedge \forall y \in V_\theta\ (y = x \leftrightarrow (V_\theta, \in) \models \chi[y, \alpha, z, A]))\Big\}$$

die **Klasse der über** A **ordinalzahldefinierbaren Mengen** und

$$\mathrm{HOD}(A) :\equiv \{x \mid \mathrm{TC}(\{x\}) \in \mathrm{OD}(A)\}$$

die **Klasse der über** A **erblich-ordinalzahldefinierbaren Mengen**. Entsprechend 13.7 zeigt man, daß HOD(A) ein inneres Modell der Mengenlehre ist, d.h., wir haben

Satz 20.1 *Es gilt* **ZFC** $\vdash$ (HOD(A) *ist transitiv*). *Ist ferner* φ *ein* **ZF**-*Axiom oder eine Instanz eines* **ZF**-*Schemas, so gilt* **ZFC** $\vdash \varphi^{\mathrm{HOD}(A)}$.