Mathematisches Institut
der Universität Bonn
P. Koepke, B. Irrgang

WS 06/07
20. 11. 06
Blatt 5

Übungen zur Mengenlehre I

17. Zeigen Sie:

(a) Sind $x, y \in V_\alpha$, dann sind $\{x, y\}, (x, y), x \cup y, \bigcup x, \mathcal{P}(x) \in V_{\alpha+\omega}$.

(b) $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \in V_{\omega+\omega}$.

18. Sei $(\mathrm{AC})_\omega$ die Aussage: Jede abzählbare Familie von nicht leeren Mengen hat eine Auswahlfunktion.

Und (DC) sei: Sei E eine zweistellige Relation auf einer nicht leeren Menge A. Und für jedes $a \in A$ existiere ein $b \in A$ mit bEa. Dann gibt es eine Folge $\langle a_n \mid n \in \omega \rangle$, so dass $a_{n+1} E a_n$ für alle $n \in \omega$ gilt.

Zeigen Sie (in **ZF**): (DC) $\Rightarrow$ $(\mathrm{AC})_\omega$.

19. Sei $\alpha \in On$ und $\alpha \sim \omega$. Beweisen Sie, dass es dann eine ordnungserhaltende Injektion $f : \alpha \to \mathbb{Q}$ gibt.

20. Eine Menge x heisst Dedekind-unendlich, wenn es ein $y \subseteq x$ mit $y \neq x$ und $y \sim x$ gibt.

Zeigen Sie in **ZF**: Eine Menge ist genau dann Dedekind-unendlich, wenn sie eine abzählbar unendliche Teilmenge hat.

Folgern Sie daraus, dass unter **ZFC** unendlich und Dedekind-unendlich äquivalent sind.

Jede Aufgabe wird mit 8 Punkten bewertet.

Abgabe: am 27. 11. 06 in der Vorlesung