Mathematisches Institut
der Universität Bonn
P. Koepke, B. Irrgang

WS 06/07
29. 01. 07
Blatt 13

Übungen zur Mengenlehre I

49. Sei M ein Grundmodell und $(\mathbb{P}, \leq) \in M$ eine Forcing-Halbordnung.
Sei R eine Relation auf M, so dass

$$R(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n, p) \ \wedge \ q \leq p \ \rightarrow \ R(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n, q)$$

für alle $\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n \in M$ und $p, q \in \mathbb{P}$ gilt.
Außerdem gelte für alle über M $\mathbb{P}$-generischen G und alle $\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n \in M$:

$$M[G] \models \varphi(\dot{x}_1^G, \ldots, \dot{x}_n^G) \ \leftrightarrow \ \exists p \in G \ R(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n, p).$$

Zeigen Sie, dass dann

$$R(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n, p) \ \leftrightarrow \ p \Vdash \varphi(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)$$

für alle $\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n \in M$ und $p \in \mathbb{P}$ gilt.

50. Zeigen Sie:

$$\forall p \ \exists q \leq p \ (q \Vdash \varphi \text{ oder } q \Vdash \neg\varphi).$$

51. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:
(i) $p \Vdash \varphi(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)$
(ii) $\{q \in \mathbb{P} \mid q \Vdash \varphi(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)\}$ ist dicht in $\mathbb{P}$ unter p.

52. Sei M ein Grundmodell und $\alpha = (\omega_1)^M$. Definieren Sie eine Forcing-Halbordnung $\mathbb{P}$, so dass $\alpha \neq (\omega_1)^{M[G]}$ für alle über M $\mathbb{P}$-generischen Filter G.

Jede Aufgabe wird mit 8 Punkten bewertet.

Abgabe: am 05. 02. 07 in der Vorlesung