Das Itô-Integral

Merlin Carl, Dominik Klein, Tobias Polley

10. Juli 2006

Definition. *Das stochastische Integral der internen Prozesse* $X, Y : \Omega \times \mathbb{T} \to {}^*\mathbb{R}$*, gegeben durch*

$$\int_0^t X \mathrm{d}Y = \sum_{s=0}^{t} X_s \Delta Y_s,$$

heißt Itô-Integral*, falls* Y *die Brownsche Bewegung ist.*

Definition. *Sei* $x : \Omega \times [0,1] \to \mathbb{R}$ *gegeben. Dann heißt der hyperendliche Prozeß* $X : \Omega \times \mathbb{T} \to {}^*\mathbb{R}$ *ein* Lifting von x (bezüglich $P \times \lambda$)*, falls*

$$^\circ X(\omega, t) = x(\omega, {}^\circ t)$$

$L(P \times \lambda)$*-fast sicher.*

Seien $\chi_i : \Omega \times \mathbb{T} \to {}^*\mathbb{R}$ *hyperfinite random walks* und $b_i : \Omega \times [0,1] \to \bar{\mathbb{R}}$ ihre Standardteile, d.h. $b_i(\omega, t) = {}^\circ\chi_i(\omega, t^+)$.

Theorem (Itô's Lemma). *Sei* $\varphi : \mathbb{R}^n \times [0,1] \to \mathbb{R}$ *ausreichend differenzierbar mit den Raumableitungen* ∇ *und* Δ *sowie der Zeitableitung* ∂_t*. Dann gilt für alle* $t \in [0,1]$

$$\mathrm{d}\varphi(b(t)) = \nabla\varphi(b(t))\mathrm{d}b + (\frac{1}{2}\Delta\varphi + \partial_t\varphi)(b(t))dt,$$

und äquivalent dazu

$$\varphi(b(t)) - \varphi(b(0)) = \int_0^t \nabla\varphi(b(s))\mathrm{d}b(s) + \int_0^t (\frac{1}{2}\Delta\varphi + \partial_t\varphi)(b(s))\mathrm{d}s$$

$L(P)$*-fast sicher.*