Loeb-Räume

Cornelius Viktor

5. Mai 2006

1 Messbare Mengen

Für die folgenden Betrachtungen benötigen wir zuerst

Definition 1.1 *Einen Hyper-Wahrscheinlichkeitsraum* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *nennt man* *-endlich*, wenn* Ω *eine* **-endliche Menge ist.* μ *heißt ein* normalisiertes Zählmaß*, wenn für alle* $X \in \mathcal{A}$ *gilt:*

$$\mu(X) = \frac{|X|}{|\Omega|}. \tag{1}$$

Für ein Zählmaß μ ist es wichtig festzuhalten, dass $\mathcal{A} = {}^*\mathcal{P}(T)$ die Algebra aller internen Teilmengen ist.

Im Folgenden diskutieren wir den Raum $(\mathbb{T}, \mathcal{A}, \mu)$ mit dem Zählmaß μ.
Für diesen Raum gilt nun der

Satz 1.2 *Seien* $(\mathbb{T}, \mathcal{A}, \mu)$ *der durch das Hyper-Zeitintervall und durch das Zählmaß gegebene Raum, sowie* $S \subset [0, 1]$.
Dann gilt:

(*i*) *S ist genau dann Lebesgue-messbar, wenn* $\mathrm{st}^{-1}(S)$ *Loeb-messbar ist.*

(*ii*) *Das Lebesgue-Maß von S ist gegeben durch:*

$$\mathrm{Leb}(S) = \mu_{\mathcal{L}}(\mathrm{st}^{-1}(S)), \tag{2}$$

d.h. st *ist eine Maß-erhaltende Abbildung.*

2 Messbare Funktionen

Hier überlegen wir uns, wie man eine Zufallsvariable durch eine interne Funktion mit hyper-reellen Werten darstellt.
Es sei dazu $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, mit der Intervall-Topologie.

Definition 2.1 *Sei $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion.*
Dann heißt eine interne Funktion $F : \Omega \to {}^*\overline{\mathbb{R}}$ "lifting" *von f, wenn $^\circ(F(\omega)) = f(\omega)$ fast sicher bezüglich $\mu_{\mathcal{L}}$ gilt.*

Diese Notation wird in der Regel benutzt, wenn f eine Zufallsvariable ist, d.h. eine $\mu_{\mathcal{L}}$-messbare Funktion. Eine $\mu_{\mathcal{L}}$-messbare Funktion heißt auch *Loeb-messbar.*
In dieser Situation sagt man, dass f der *Standardteil* von F ist, und schreibt $^\circ F = f$.

Proposition 2.2 *Sei $F : \Omega \to {}^*\mathbb{R}$ ein "lifting" von $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Des Weiteren sei $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig.*
Dann ist $^*\theta(F)$ ein "lifting" von $\theta(f)$.

Weiterhin haben wir

Proposition 2.3 *Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Hyper-Wahrscheinlichkeitsraum und $F : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ eine interne Funktion.*
Ist dann F messbar bezüglich μ, so ist $^\circ F$ messbar bezüglich $\mu_{\mathcal{L}}$.

Mit der Definition des Hyper-Zeitintervalls aus dem letzten Vortrag ist nun für alles Folgende $(\mathbb{T}, \mathcal{A}, \mu)$ mit dem Zählmaß μ ein zentrales Beispiel.

Satz 2.4 *Es sei $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion auf einem gegebenen Hyper-Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.*
Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) f ist $\mu_{\mathcal{L}}$-messbar.

(ii) f hat ein "lifting".

(iii) f hat ein μ-messbares "lifting".

Wenn das Maß μ unbeschränkt sein darf, kann Satz 2.4 nur dann verallgemeinert werden, wenn es eine Menge von unendlichem Maß gibt, auf der $|f|$ von Null weg gleichmäßig beschränkt ist.

Manchmal muss man "liftings" betrachten, bei denen sowohl Urbild als auch Bild intern sind.

Definition 2.5 *Sei $f : [0, 1] \to \overline{\mathbb{R}}$.*
Eine interne Funktion $F : \mathbb{T} \to {}^*\overline{\mathbb{R}}$ heißt genau dann ein "lifting" *von f, wenn gilt:*

$$^\circ F(t) = f(^\circ t) \qquad \text{für fast alle } t. \tag{3}$$

Damit gilt nun der folgende

Satz 2.6 *$f : [0, 1] \to \overline{\mathbb{R}}$ ist genau dann Lebesgue-messbar, wenn es ein "lifting" $F : \mathbb{T} \to {}^*\overline{\mathbb{R}}$ hat.*

Insgesamt haben wir also gesehen, dass statt Lebesgue-messbaren Untermengen von $[0, 1]$ interne Untermengen von $\mathbb{T}$ und statt Lebesgue-messbaren Funktionen interne Funktionen betrachtet werden können.