Interne Inhalte und Loeb-Maße

Carl-Philipp Heldman

8 Mai 2006

Definition 1 (Interner Inhalt). *Sei $\mathcal{C}$ eine Algebra über Y, also $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(Y)$ mit den Eigenschaften: $Y \in \mathcal{C},\ A \in \mathcal{C} \Rightarrow A^C \in \mathcal{C},\ A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{C}$. Eine Abbildung $\nu : \mathcal{C} \to {}^*[0, \infty[$ heißt <u>interner Inhalt</u>, falls ν intern und additiv ist. Dabei heißt ν <u>additiv</u>, falls gilt:*

$$C_1, C_2 \in \mathcal{C},\ C_1 \cap C_2 = \emptyset \ \Rightarrow\ \nu(C_1 + C_2) = \nu(C_1) + \nu(C_2).$$

Ist zudem $\nu(Y)$ finit, so heißt ν ein <u>finiter</u> Inhalt.

Proposition 1. *Sei $\mathcal{C}$ eine Algebra über Y und $\nu : \mathcal{C} \to {}^*[0, \infty]$ ein finiter Inhalt. Setze:*

$$\nu^L(C) := st(\nu(C)),\ C \in \mathcal{C}$$

Dann ist $\nu^L : \mathcal{C} \to {}^*[0, \infty[$ ein finiter Inhalt.

<u>Bew</u>.: $\nu^L(Y) = st(\nu(Y)) < \infty$ $\qquad$ $C_1 \cap C_2 = \emptyset,\ C_1, C_2 \in \mathcal{C}$:
$\nu^L(C_1 \cup C_2) = st(\nu(C_1) + \nu(C_2)) = st(\nu(C_1)) + st(\nu(C_2)) = \nu^L(C_1) + \nu^L(C_2)$

Definition 2 ($\overline{\nu}$ und $\underline{\nu}$). *Sei $\mathcal{C}$ Algebra über Y und $\nu : \mathcal{C} \to {}^*[0, \infty[$ ein finiter interner Inhalt.*

$$\underline{\nu}(D) := \sup_{\mathcal{C} \ni C \subset D} \nu^L(C),\ C \in \mathcal{C}\overline{\nu}(D) := \inf_{\mathcal{C} \ni C \supset D} \nu^L(C),\ C \in \mathcal{C}$$

Bemerkung 1. *$\underline{\nu}, \overline{\nu} : \mathcal{P} \to [0, \infty[$ sind monoton, und es gilt:*

- $\underline{\nu}(D) \leq \nu(D)$
- $\underline{\nu}(C) = \overline{\nu}(C) = \nu^L(C)$ *für* $C \in \mathcal{C}$
- $\underline{\nu}(D) + \overline{\nu}(Y - D) = \nu^L(Y),\ D \subset Y$

<u>Bew</u>.: $\underline{\nu}(D) = \sup_{D \supset C \in \mathcal{C}} \underbrace{(\nu^L(Y) - \nu^L(Y - C))}_{=\nu^L(C)} = \nu^L(Y) - \underbrace{\inf_{D \supset C \in \mathcal{C}} \nu^L(Y - C)}_{=\overline{\nu}(Y - C)}$

<u>Eigenschaften von $\underline{\nu}$ und $\overline{\nu}$:</u>

- $D_n \uparrow$, *d.h.* $D_i \subset D_{i+1} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \overline{\nu}(D_n) = \overline{\nu}(\bigcup_{n=1}^{\infty}(D_n))$
- $D_n \downarrow$, *d.h.* $D_i \supset D_{i+1} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \underline{\nu}(D_n) = \underline{\nu}(\bigcap_{n=1}^{\infty}(D_n))$
- $\overline{\nu}(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\nu}(D_n)$

- $\sum_{n=1}^{\infty} \underline{\nu}(D_n) \leq \underline{\nu}(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n)$, falls die D_n paarweise disjunkt sind.

  Kriterium:

$$\underline{\nu}(D) = \overline{\nu}(D) \Leftrightarrow \inf_{C \supset D \supset D;\ C,E \in \mathcal{C}} \nu^L(E - C) = 0$$

Bew.:
$\Rightarrow$: $\underline{\nu}(D) = \overline{\nu}(D)$:
Sei $\varepsilon > 0. \exists C, E \in \mathcal{C},\ s.d.\ \underline{\nu}(D) \leq \nu^L(C) + \frac{\varepsilon}{2}\ ,\ \nu^L(E) \leq \overline{\nu}(D) + \frac{\varepsilon}{2}$
$\Rightarrow \nu^L(E - C) = \nu^L(E) - \nu^L(C) \leq (\nu^L(E) - \overline{\nu}(D)) + (\underline{\nu}(D) - \nu^L(C)) \leq \varepsilon$
$\forall \varepsilon\, 0 \ \Rightarrow \inf_{C \supset D \supset Y;\ C,E \in \mathcal{C}} \nu^L(E - C) = 0$
$\Leftarrow$: $0 \leq \overline{\nu}(D) - \underline{\nu}(D) \leq \nu^L(E) - \nu^L(C) = \nu^L(E - C) < \varepsilon\ \forall \varepsilon\, 0$

Definition 3. $\mathcal{L}(\nu) := \{D \subset Y : \underline{\nu}(D) = \overline{\nu}(D)\}$
$\nu^L(D) := \overline{\nu}(D) = \underline{\nu}(D),\ D \in \mathcal{L}(\nu)$
Es gilt dann

- $\mathcal{L}(\nu)$ *ist eine* $\sigma -$ *Algbra mit* $C \supset \mathcal{L}(\nu)$
- $\nu^L :\ \mathcal{L}(\nu) \to [0, \infty[$ *ist ein Maß mit* $\nu^L(C) = st(\nu(C)),\ f\ddot{u}r\ C \in \mathcal{C}.$

ν^L *nennen wir das Loeb-Maß.*
Bew.:

- $D \in \mathcal{L} \Rightarrow D^C \in \mathcal{L}$
  Sei $\mathbb{R} \ni \varepsilon > 0 :\ \exists E \supset D \supset C :\ \nu^L(C^C - E^C) = \nu^L(E - C) < \varepsilon \Rightarrow D^C \in \mathcal{L}$
- $(D_n)_n \in \mathbb{N}$ *paarweise disjunkt*, $D_n \in \mathcal{L} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \in \mathcal{L} \Rightarrow \nu^L(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu^L(D_n)$
  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \overline{\nu}(D_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \underline{\nu}(D_n) \leq (\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n) \leq \overline{\nu}(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \overline{\nu}(D_n)$
  $\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \in \mathcal{L},\ \nu^L(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu^L(D_n)$
- $A_i \in \mathcal{L}, i \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{L}$
  $D_1 = A_1,\ D_{i+1} = A_{i+1} - D_i$

Definition 4. $D \triangle C := (D - C) \cup (C - D)$ *bezeichnen wir als symmetrischen* $Differenz.$

Satz 1. *1.* ν^L *ist das einzige Maß auf* $\mathcal{L}$ *mit* $\nu^L(C) = st(\nu(C)),\ C \in \mathcal{C}$ $(Einzige\ Fortsetzung)$.

2. $(D \subset N,\ N \in \mathcal{L}(\nu) \wedge \nu^L(N) = 0) \Rightarrow D \in \mathcal{L}(\nu)$ $\quad(Vollst\ddot{a}ndigkeit)$.

3. $D \in \mathcal{L}(\nu) \Rightarrow \nu^L(D \triangle C) = 0,\ f\ddot{u}r\ ein\ C \in \mathcal{C}$ $\quad(Approximation)$.
Bew.:

1. $\nu^L(D) = \nu(D) = \sup_{D \supset C,\ C \in \mathcal{C}} \nu^L(C) = \sup_{D \supset C,\ C \in \mathcal{C}} \mu(C) \leq \mu(D) \leq \inf_{\mathcal{C} \ni C \supset D} \mu(C) = \inf_{\mathcal{C} \ni C \supset D} \nu^L(C) = \overline{\nu}(D) = \nu^L(D)$
   $\Rightarrow \nu^L(D) = \mu(D)\ \forall D \in \mathcal{L}$
2. $0 \leq \underline{\nu}(D) \leq \overline{\nu}(D) \leq \overline{\nu}(N) = \nu^L(N) = 0 \quad \Rightarrow D \in \mathcal{L}(\nu)$

3. $D \in \mathcal{L}(\nu): \ \exists C_n \subset D \subset E_n; \ C_n, E_n \in \mathcal{C}: \ \nu^L(E_n - C_n) \leq \frac{1}{n}$.
$Ges.: \ C \in \mathcal{C}: \ C_n \subset C \subset E_n \forall n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow D \triangle C \subset E_n - C_n \ \Rightarrow \nu^L(D \triangle C) \leq \frac{1}{n} \forall n \Rightarrow \nu^L(D \triangle C) = 0$
$Def.: \ \mathcal{H}_n := \{C \in \mathcal{C}: \ C_n \subset C \subset E_n\}$
Diese Mengen sind nicht leer und besitzen die endliche Schnitteigenschaft.
(*Denn* $\bigcup_{i=1}^n C_i \in \bigcap_{j=1}^n \mathcal{H}_j$, *da* $\mathcal{C} \ni \bigcup_{i=1}^n C_i \subset D \subset E_j \forall j$)
$\Rightarrow \bigcap_{j=1}^\infty \mathcal{H}_j \neq \emptyset$.
$\Rightarrow \exists C \in \mathcal{C}: \ C_n \subset C \subset E_n \forall n$.