Nonstandardtopologie (II)

Anja Hesse

1 Fortsetzung Topologie

Satz 1.1. *Sei E ein Hausdorffraum, A interne Menge in *E.*
Dann ist st(A) abgeschlossen.

Beweis. Ohne Einschränkung sei $st(A) \neq \emptyset$ (denn die leere Menge ist immer abgeschlossen).
Sei $a \in \overline{st(A)}$. Da gilt $\overline{st(A)} = \{x \in^* E \,|\emptyset \neq O \cap st(A), \forall O \in O_x\}$,gilt $O \cap st(A) \neq \emptyset, \forall O \in O_a$, wobei O_x die Menge aller offenen Mengen, die den Punkt x enthalten, bezeichnet.
Sei $b \in O \cap st(A)$. Dann existiert $c \in A$ mit b=st(A) d.h. $c \in \mu(b)$.
Da O offen ist folgt mit Satz 1(2) aus Nonstandardtopologie (I): $\mu(b) \subseteq {}^*O$ also $c \in {}^*O$. Daher $c \in {}^*O$ und somit ${}^*O \cap A \neq \emptyset$ für alle $O \in O_a$.
Da ${}^*O \cap A$ interne Menge ist und für die Familie $\{{}^*O \cap A \,|O \in O_a\}$ die endliche Durchschnittseigenschaft gilt, folgt mit dem allgemeinen Saturationsprinzip, dass $\mu(a) \cap A = (\bigcap_{O \in O_a} {}^*O) \cap A \neq \emptyset$,
Sei $b_0 \in \mu(a) \cap A$. Dann $a = st(b_0) \in st(A)$.
Also falls $a \in \overline{st(A)}$ dann $a \in st(A)$, d.h. st(A) abgeschlossen. □

2 Stetigkeit

Erinnerung:Sei f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
f stetig in $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{R}$ mit $y \approx x$ gilt ${}^*f(y) \approx {}^*f(x)$

Bemerkung 2.1. *Für* $x \in \mathbb{R}$ *ist* $\mu(x) = \{y \in {}^*\mathbb{R} \,|y \approx x\}$

Satz 2.2. *Sei* $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
f ist stetig in x genau dann wenn gilt ${}^*f(\mu(x)) \subseteq \mu({}^*f(x))$.

Beweis. "$\Leftarrow$ ": Sei f stetig in $x \in \mathbb{R}$.
Sei $y \in {}^*f(\mu(x))$ beliebig. Zz $y \in \mu({}^*f(x))$.
Es gibt ein $z \in \mu(x)$ mit $y =^* f(z)$. Für dieses z gilt $z \approx x$. Mit obiger Stetigkeitsäquivalenz folgt y=$^*f(z) \approx^* f(x)$ und somit $y \in \mu({}^*f(x))$.

"$\Rightarrow$": Sei ${}^*f(\mu(x)) \subseteq \mu({}^*f(x))$.
Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig.
Sei $y \in {}^*\mathbb{R}$ mit $y \approx x$. Dann $y \in \mu(x)$, also ${}^*f(y) \in {}^*f(\mu(x))$ und somit nach Voraussetzung ${}^*f(y) \in \mu({}^*f(x))$, d.h. ${}^*f(y) \approx^* f(x)$. Also folgt mit obiger Stetigkeitsäquivalenz f stetig.

□

Definition 2.3 (S-stetig)**.** *Sei $F: {}^*\mathbb{R} \longrightarrow {}^*\mathbb{R}$ interne Funktion.*
F heißt S-stetig *in $x \in \mathbb{R}$ genau dann wenn für alle $y \in {}^*\mathbb{R}$ mit $x \approx y$ gilt $F(x) \approx F(y)$.*

Bemerkung 2.4. *Also f stetig genau dann wenn ${}^*f$ S-stetig in jedem $x \in \mathbb{R}$.*

Definition 2.5 (Hyperfinite Mengen)**.** *Eine interne Menge X heißt* hyperfinit *genau dann wenn es eine Bijektion zwischen X und $\{0,1,\ldots,N\}$ für ein $N \in {}^*\mathbb{N}$ gibt.*

wichtiges Beispiel:
hyper time Intervall: T= $\{0,\ 1/N,\ldots,(N\text{-}1)/N,\ N\}$ mit $N \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ ist hyperfinite Untermenge von ${}^*[0,1]$.

Wir betrachten nun eine S-stetige Funktion: $F: T \longrightarrow {}^*\mathbb{R}$ mit $F(t) \in fin({}^*\mathbb{R}) \forall t \in T$.
Definiere $f: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ durch f(x)= st(F(t)) für $t \approx x$

Bemerkung 2.6.

1. *f wohldefiniert, da für t, t' $\in T$ mit $t \neq t'$ und $t \approx x$, $t' \approx x$ gilt $t \approx t'$. Somit folgt mit S-Stetigkeit $F(t) \approx F(t')$. Also $st(F(t)) = st(F(t'))$.*

2. *f ist auf ganz [0,1] definiert, also gibt es für alle x $\in$[0,1] ein t $\in T$ mit $x \approx t$.*

   Beweis. Da für alle $x \in (0,1) \subseteq \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ mit $I := [x - 1/n, x + 1/n] \subseteq [0,1]$ gilt I enthält ein m/n mit $m \in \mathbb{N}, m \leq n$ (denn I hat Lnge 2/n) folgt mit dem Transferprinzip: Für $N \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ enthlt I':=[x-1/N,x+1/N] ein M/N mit $M \in {}^*\mathbb{N}, M \leq N$. Da $I' \subseteq \mu(x)$ folgt $x \approx M/N$ und $M/N \in T$. □

Satz 2.7. *Obiges f ist stetig.*

Beweis. Annahme f ist nicht stetig in $x \in$ [0,1].
Dann gibt es ein $\epsilon \in \mathbb{R}_+ : \forall n \in \mathbb{N} : |y - x| < 1/n$ und $|f(x) - f(y)| > \epsilon$.
Seien $t, t' \in T$ mit $t \approx x$ und $t' \approx y$:
Dann $|t - t'| < 1/n$ und $|F(t) - F(t')| > \epsilon$ (da $F(t) \approx f(x)$ und $F(t') \approx f(y)$).
Daher gilt für alle $n \in \mathbb{N}$: $\exists\ t, t' \in T$ mit $(t, t' \in [x - 1/n, x + 1/n]) \wedge |F(t) - F(t')| > \epsilon$.
Sei $X_n = \left\{t, t' \in T^2 \,|(t, t' \in [x - 1/n, x + 1/n]) \wedge |F(t) - F(t')| > \epsilon\right\}$.
Dann ist $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Familie interner Mengen, die die endliche Durchschnittseigenschaft erfüllt. Somit folgt mit dem Saturationsprinzip, dass $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n \neq \emptyset$.
Also existiert $(t, t') \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n$.Für diese $t, t' \in T$ gilt $t \approx t'$ und $|F(t) - F(t')| > \epsilon$, wobei $|F(t) - F(t')| > \epsilon$ heißt, dass gerade nicht gilt $F(t) \approx F(t')$. Das ist ein Widerspruch zur S-Stetigkeit von F. Also gilt die Annahme nicht d.h. f ist stetig in x. Wegen der Beliebigkeit von x ist somit gezeigt, dass f stetig ist. □