Seminar zur Nonstandard Analysis und Anwendung - Topologie

Anja Hesse - Anna Siffert

03.05.06

Saturierung

Wir haben eine Abbildung $* : V(\mathbb{R}) \to V(^*\mathbb{R})$ Nichtstandardeinbettung (NSE) genannt, falls sie folgenden drei Prinzipien genügt:

- **Erweiterungsprinzip**: $^*r = r \ \forall r \in \mathbb{R}$ und $\mathbb{R} \subsetneq^* \mathbb{R}$
- **Transferprinzip** Für alle beschränkten Sätze θ in $\mathcal{L}_{V(\mathbb{R})}$ gilt $(V(^*\mathbb{R}), \in) \models \theta$ gdw $(V(\mathbb{R}), \in) \models {}^*\theta$
- ω_1**-Saturierungsprinzip**: Sei $A_1 \supseteqq A_2 ...$ eine abzählbare Kette von
  internen Mengen, so gilt: $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$

Allgemeines Saturierungsprinzip: Eine Nichtstandard-Erweiterung heißt bei gegebener Kardinalzahl κ, κ-saturiert, falls gilt: Ist card$(\Gamma) <$ κ und $\{A_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ eine Familie interner Mengen mit der finiten Schnitteigenschaft, so gilt

$$\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \neq \emptyset$$

Desweiteren heißt $V(^*S)$ **polysaturiert**, falls es κ-saturiert ist, für $\kappa \geq$ card(V(S)).

Nonstandard-Topologie

Notation: Die Toplogie auf dem Raum E ist durch die Menge $\boldsymbol{O}$ der offenen Mengen gegeben. Für $x \in E$ sei O_x die Familie offener Mengen, welche x enthalten.

Definition 1: Unter der Monade von x, verstehen wir: $\mu(x) = \bigcap\{{}^*O|O \in O_x\}$

Satz 1: E sei ein topologischer Raum
(1) E ist hausdorff $\Leftrightarrow \mu(x) \cap \mu(y) = \emptyset \; \forall \, x, y \in$ E mit $x \neq y$
(2) $A \subseteq E$ offen $\Leftrightarrow \mu(x) \subseteq {}^*A \;, \forall \, x \in A$
(3) $A \subseteq E$ abgeschlossen $\Leftrightarrow \forall x \in E$ und alle $y \in {}^*A$, $y \in \mu(x)$ impliziert $x \in A$
(4) $A \subseteq E$ ist kompakt $\Leftrightarrow \forall x \in {}^*A \; \exists \, y \in A$ mit $x \in \mu(y)$

Definition 2: Ein Punkt $x \in {}^*E$ heißt **nahestandard** $\Leftrightarrow$ $x \in \mu(y)$ für ein $y \in E$. $Ns({}^*E)$ ist die Menge aller nahestandard Punkte in ${}^*E$.

Sei $x \in \mu(y)$ für ein $y \in E$. Wenn E hausdorff ist, so folgt aus Satz 1 (1), dass y eindeutig bestimmt ist. Wir setzen $y = st(x)$, d.h. so wird eine Abbildung $st : {}^*E \to E$ erklärt-sie wird **'Standard-Part'-Abbildung** genannt. Für $A \subsetneqq {}^*E$ sei st(A) wie folgt gegeben: st$(A) = \{st(x)|x \in A \cap Ns({}^*E)\}$.

Approximationslemma:
Für jedes $x \in E \; \exists$ eine interne Menge $D \in {}^*O_x$, so dass $D \subseteq \mu(x)$.