Mathematisches Institut
der Universität Bonn
P. Koepke, B. Irrgang

SoSe 2006
02. 06. 06
Blatt 8

Übungen zur Einführung in die Mathematische Logik

29. Sei $(\mathbb{R}^*, <^*, +^*, \cdot^*, f^*)$ der in der Vorlesung definierte Erweiterungskörper von $(\mathbb{R}, <, +, \cdot, f)$ mit infinitesimalen Elementen. Für $x \in \mathbb{R}^*$ bezeichne $st(x)$ den Standardteil von x. Zeigen Sie für alle $x, y \in \mathbb{R}^*$:

$$st(x+y) = st(x) + st(y).$$

30. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $[a,b]^* = \{x \in \mathbb{R}^* \mid a \leq x \leq b\}$. Zeigen Sie:

(a) f ist stetig auf $[a,b]$
$\Leftrightarrow$ Für alle $x \in [a,b]$ und $y \in [a,b]^*$ mit $y \approx x$ gilt $f^*(y) \approx f(x)$.

(b) f ist gleichmäßig stetig auf $[a,b]$
$\Leftrightarrow$ Für alle $x, y \in [a,b]^*$ mit $y \approx x$ gilt $f^*(y) \approx f^*(x)$.

31. (a) Verwenden Sie die Nonstandard-Charakterisierungen aus Aufgabe 30, um zu zeigen: Ist f stetig auf dem Intervall $[a,b]$, so ist es auch gleichmäßig stetig auf $[a,b]$.

(b) Warum funktioniert Ihr Beweis nicht für offene Intervalle $]a,b[$?

32. Sei $K := \{\frac{p}{q} \mid p, q$ Polynome über $\mathbb{R}$, $q \neq 0\}$ der Körper der rationalen Funktionen über $\mathbb{R}$. Für $f, g \in K$ setze man $f \leq g$, wenn ein x_0 existiert, so daß $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \geq x_0$ gilt. Zeigen Sie:

(a) K ist ein angeordneter Erweiterungskörper von $\mathbb{R}$, der unendliche und von Null verschiedene infinitesimale Elemente enthält. Dabei identifiziere man $r \in \mathbb{R}$ mit der konstanten Funktion r.

(b) Zeigen Sie, dass die angeordneten Körper K und $\mathbb{R}$ nicht dieselben Sätze erfüllen.

Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet.

Abgabe: am 16. 06. 06 in der Vorlesung