Mathematisches Institut
der Universität Bonn
P. Koepke, B. Irrgang

SoSe 2006
26. 05. 06
Blatt 7

Übungen zur Einführung in die Mathematische Logik

25. Sei $S = (+, \cdot, 0, 1)$ die Sprache der Körpertheorie. Untersuchen Sie, ob die folgenden S-Modellklassen elementar bzw. Δ-elementar sind:

(a) die Modellklasse der endlichen Körper

(b) die Modellklasse der unendlichen Körper

(c) die Modellklasse der abzählbaren Körper.

26. Sei $\leq$ eine partielle Ordnung auf einer Menge A. Zeigen Sie: Es gibt eine lineare Ordnung auf A, die $\leq$ fortsetzt.

27. Eine lineare Ordnung $\leq$ auf einer Menge A heißt Wohlordung, wenn jede nicht leere Teilmenge von A ein bezüglich $\leq$ kleinstes Element hat.

Sei S eine Sprache und $\mathfrak{A} = (A, \leq, \ldots)$ eine unendliche S-Struktur, so dass $\leq$ eine Wohlordung von A ist. Zeigen Sie: Es gibt eine S-Struktur $\mathfrak{A}' = (A', \leq'$ $, \ldots)$, so dass in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ dieselben S-Sätze gelten, aber $\leq'$ keine Wohlordnung ist.

28. Sei $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$ die Struktur der natürlichen Zahlen mit ihrer üblichen Addition, Multiplikation, 0 und 1. Sei $\mathfrak{N}^< = (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1, <)$ dieselbe Struktur erweitert um die übliche Kleiner-Relation. Es sei $Th(\mathfrak{N})$ die Menge aller Sätze φ mit $\mathfrak{N} \models \varphi$. Analog sei $Th(\mathfrak{N}^<)$ definiert.

Sei $\mathfrak{A} \models Th(\mathfrak{N})$. Definiere eine Relation $a <^{\mathfrak{A}} b$ in $\mathfrak{A}$ durch

$$a <^{\mathfrak{A}} b \quad \text{gdw} \quad \mathfrak{A} \models (a \neq b \wedge \exists c \; a + c = b).$$

Zeigen Sie: $(\mathfrak{A}, <^{\mathfrak{A}}) \models Th(\mathfrak{N}^<)$.

Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet.

Abgabe: am 02. 06. 06 in der Vorlesung