Mathematisches Institut
der Universität Bonn
P. Koepke, B. Irrgang

SoSe 2006
19. 05. 06
Blatt 6

Übungen zur Einführung in die Mathematische Logik

21. (a) Ist $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{C}$, so gilt $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{C}$.

(b) Ist $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{C}$, $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{C}$ und $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, so ist auch $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$.

22. Sei S eine Sprache. Seien Φ, Ψ Mengen von S-Formeln, so dass $\Phi \cup \Psi$ inkonsistent ist. Zeigen Sie, dass es dann eine S-Formel φ mit $\Phi \vdash \varphi$ und $\Psi \vdash \neg\varphi$ gibt.

23. Sei S eine Sprache. Eine Folge $(\mathfrak{A}_n \mid n \in \mathbb{N})$ von S-Strukturen mit

$$\mathfrak{A}_0 \subseteq \mathfrak{A}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathfrak{A}_n \subseteq \ldots$$

heißt Kette von Modellen. Die Vereinigung $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{A}_n$ der Kette $(\mathfrak{A}_n \mid n \in \mathbb{N})$ ist die folgendermaßen definierte S-Struktur:

Trägermenge ist $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Für Relationssymbole R von S sei $R^{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{A}_n} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} R^{\mathfrak{A}_n}$.

Für Funktionssymbole f von S sei $f^{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{A}_n} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{\mathfrak{A}_n}$.

Für Konstanstensymbole sei $c^{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{A}_n} = c^{\mathfrak{A}_0}$.

Eine Modellklasse $\mathfrak{K}$ heiße abgeschlossen unter Ketten, wenn für alle $(\mathfrak{A}_n \mid n \in \mathbb{N})$ mit $\mathfrak{A}_n \in \mathfrak{K}$ auch $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{A}_n \in \mathfrak{K}$ ist.

Zeigen Sie: Ist Φ eine Menge von Π^0_2-Sätzen, so ist $Mod^S\Phi$ abgeschlossen unter Ketten.

24. Eine Kette $(\mathfrak{A}_n \mid n \in \mathbb{N})$ von Modellen heißt elementare Kette, wenn

$$\mathfrak{A}_0 \prec \mathfrak{A}_1 \prec \ldots \prec \mathfrak{A}_n \prec \ldots .$$

Zeigen Sie: Ist $(\mathfrak{A}_n \mid n \in \mathbb{N})$ eine elementare Kette, so gilt $\mathfrak{A}_n \prec \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{A}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet.

Abgabe: am 26. 05. 06 in der Vorlesung