Mathematisches Institut
der Universität Bonn
P. Koepke, B. Irrgang

SoSe 2006
05. 05. 06
Blatt 4

Übungen zur Einführung in die Mathematische Logik

13. Sei S eine Sprache und seien $\varphi, \psi, \chi \in L^S$. Leiten Sie im Sequenzenkalkül unter Verwendung schon bewiesener abgeleiteter Regeln folgende Tautologien her:

(a) $((\varphi \to \psi) \wedge (\chi \to \psi)) \to ((\varphi \vee \chi) \to \psi)$

(b) $(\varphi \vee \psi) \to (\neg\varphi \to \psi)$.

14. (a) $\exists v_0^s \; \varphi \to \neg\forall v_0^s \; \neg\varphi$

(b) $\neg\forall v_0^s \; \neg\varphi \to \exists v_0^s \; \varphi$.

15. Sei S eine Sprache. Zeigen Sie: Ist Φ eine Menge von positiven S-Sätzen, so ist $Mod^S\Phi$ abgeschlossen unter Homomorphismen.

16. Sei S eine Sprache. Sei I eine nicht leere Menge. Für jedes $i \in I$ sei $\mathfrak{A}_i$ eine S-Struktur und $\Pi_{i\in I}\mathfrak{A}_i$ deren direktes Produkt. Zeigen Sie:

(a) Ist t ein S-Term mit $var(t) \subseteq \{v_0, \ldots, v_n\}$ und sind $g_0, \ldots, g_n \in \Pi_{i\in I}\mathfrak{A}_i$, so gilt

$$t^{\mathfrak{A}}[g_0, \ldots, g_n] = (t^{\mathfrak{A}_i}[g_0(i), \ldots, g_n(i)] \mid i \in I).$$

(b) Ist φ ein Hornsatz und $\mathfrak{A}_i \models \varphi$ für jedes $i \in I$, so gilt $\Pi_{i\in I}\mathfrak{A}_i \models \varphi$.

Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet.

Abgabe: am 12. 05. 06 in der Vorlesung