Mathematisches Institut
der Universität Bonn
P. Koepke, B. Irrgang

SoSe 2006
28. 04. 06
Blatt 3

Übungen zur Einführung in die Mathematische Logik

9. Sei S eine Sprache. Für $\varphi \in L^S$ definiere man rekursiv $\varphi^* \in L^S$ durch:
$\varphi^* := \varphi$, falls φ atomar $\quad (\neg\varphi)^* := \neg\varphi^* \quad (\varphi \vee \psi)^* = (\varphi^* \vee \psi^*)$
$(\varphi \wedge \psi)^* := \neg(\neg\varphi^* \vee \neg\psi^*) \quad (\varphi \to \psi)^* := (\neg\varphi^* \vee \psi^*)$
$(\exists x\ \varphi)^* := \exists x\ \varphi^* \quad (\forall x\ \varphi)^* := \neg\ \exists x\ \neg\ \varphi^*$.

(a) Zeigen Sie: Für alle $\varphi \in L^s$ gilt $\varphi^* \models \varphi$ und $\varphi \models \varphi^*$.

(b) Zeigen Sie die folgenden abgeleiteten Regeln des Sequenzenkalküls:

$$\frac{\Phi\varphi \quad \Phi(\varphi \to \psi)^*}{\Phi\psi} \qquad \frac{\Phi\varphi \quad \Phi\psi}{\Phi(\varphi \wedge \psi)^*} \qquad \frac{\Phi(\varphi \wedge \psi)^*}{\Phi\varphi} \qquad \frac{\Phi(\varphi \wedge \psi)^*}{\Phi\psi}$$

10. Sei S eine Sprache und seien $\varphi, \psi, \chi \in L^S$. Leiten Sie in Sequenzenkalkül unter Verwedung schon bewiesener abgeleiteter Regeln (siehe auch Aufgabe 9b) folgende Tautologien her:

(a) $(\varphi \vee \psi) \to (\psi \vee \varphi)$

(b) $((\varphi \vee \psi) \to \chi) \to (\varphi \to \chi)$.

11. (a) Sei S eine Sprache und seien $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ S-Strukturen mit Trägermengen A, B. Definieren Sie (ohne nachzuschlagen), wann eine Abbildung $\pi : A \to B$ Isomorphismus zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ heißt.

(b) Zeigen Sie: Jeder Isomorphismus $\pi : A \to B$ zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ist auch eine elementare Einbettung.

12. Sei S eine Sprache. Eine Formel $\varphi \in L^S$ heiße positiv, falls sie $\neg, \to, \leftrightarrow$ nicht enthält. Zeigen Sie: Jede positive Formel ist erfüllbar.

Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet.

Abgabe: am 05. 05. 06 in der Vorlesung