Mathematisches Institut
der Universität Bonn
P. Koepke, B. Irrgang

SoSe 2006
07. 07. 06
Blatt 12

Übungen zur Einführung in die Mathematische Logik

45. Sei S eine abzählbare Sprache. Sei $\mathfrak{A}$ eine beliebige S-Struktur mit Trägermenge A. Zeigen Sie:

(a) Für jede S-Formel $\varphi(v_0, v_1, \ldots v_n)$ gibt es eine Funktion $f_\varphi : A^n \to A$, so dass für alle $x_1, \ldots, x_n \in A$ gilt

$$\mathfrak{A} \models \exists x_0\ \varphi(x_0, x_1, \ldots, x_n) \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{A} \models \varphi(f_\varphi(x_1, \ldots, x_n), x_1, \ldots, x_n).$$

(b) Ist $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ abgeschlossen unter allen f_φ, so gilt $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}$.

46. (Fortsetzung von Aufgabe 45)

Zeigen Sie: Jede S-Struktur hat eine abzählbare, elementare Substruktur.

47. Sei $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$ die Struktur der natürlichen Zahlen mit ihrer üblichen Addition, Multiplikation, Null und Eins. Sei S die entsprechende Sprache. Sei $t_n \in T^S$ ein S-Term, der n bezeichnet. Sei weiterhin $G : L^S \to \mathbb{N}$ bijektiv (eine Kodierung der S-Formeln). Für die S-Formeln φ mit einer freien Variablen sei $F : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch

$F(n, m) = G(\varphi(t_m))$, falls $G(\varphi) = n$

$F(n, m) = 0$ sonst.

Wir nehmen an, dass eine S-Formel χ existiert, so dass $F(n, m) = k$ genau dann gilt, wenn $\mathfrak{N} \models \chi(n, m, k)$.

Zeigen Sie: Zu jeder S-Formel ψ mit einer freien Variablen existiert ein S-Satz θ mit $\mathfrak{N} \models \theta \leftrightarrow \psi(G(\theta))$. (Fixpunktsatz)

48. (Fortsetzung von Aufgabe 47)

Zeigen Sie: Es gibt keine S-Formel φ, so dass für alle S-Sätze θ gilt

$$\mathfrak{N} \models \varphi(G(\theta)) \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{N} \models \theta.$$

Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet.

Abgabe: am 14. 07. 06 in der Vorlesung