Mathematisches Institut der Universität Bonn
P. Koepke, B. Irrgang

SoSe 2006
30. 06. 06
Blatt 11

Übungen zur Einführung in die Mathematische Logik

41. Für eine Ordinalzahl α sei $\alpha + 1$ der direkte Nachfolger von α in $<$. Definiere auf den Ordinalzahlen rekursiv eine Addition durch $\alpha + 0 := \alpha$, $\alpha+(\beta+1) := (\alpha+\beta)+1$ und $\alpha+\delta := \bigcup\{\alpha+\beta \mid \beta < \delta\}$ für Limesordinalzahlen $\delta \neq 0$.

Zeigen Sie: $\mathbf{ZF} \models \omega + \omega \in V$.

42. Definiere rekursiv $V_0 = \emptyset$, $V_{\alpha+1} = \mathfrak{P}(V_\alpha)$ und $V_\lambda = \bigcup\{V_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$ für Limesordinalzahlen $\lambda \neq 0$. Zeigen Sie:

(a) Für alle $\alpha \in Ord$ ist V_α transitiv.

(b) $V = \bigcup\{V_\alpha \mid \alpha \in Ord\}$.

43. Seien α und β Ordinalzahlen. Sei $f : \alpha \to \beta$ ein Ordnungsisomorphismus (bzgl. $\in$). Zeigen Sie, dass dann $\alpha = \beta$ ist.

44. Zeigen Sie, dass unter **ZF** das Auswahlaxiom **(AC)** und die folgende Aussage äquivalent sind:

$\forall a \; \exists f \; (f : a \to V \;\wedge\; \forall u((u \in a \;\wedge\; u \neq \emptyset) \to f(u) \in u))$.

Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet.

Abgabe: am 07. 07. 06 in der Vorlesung