Mathematisches Institut
der Universität Bonn
P. Koepke, B. Irrgang

SoSe 2006
23. 06. 06
Blatt 10

Übungen zur Einführung in die Mathematische Logik

37. (a) Definieren Sie auf ω durch Rekursion eine Addition, die der üblichen entspricht.

(b) Zeigen Sie: Die so definierte Addition ist assoziativ und kommutativ.

38. Für Mengen x und y sei $x^y := \{f \mid f : y \to x\}$. Zeigen Sie: Es gibt eine Bijektion zwischen 2^ω und ω^ω.

39. Sei α eine abzählbare Ordinalzahl. Zeigen Sie: Es gibt eine ordungserhaltende Injektion $f : \alpha \to \mathbb{Q}$.

40. Für $n \in \mathbb{N}$ seien rekursiv Klassenterme t_n definiert, so dass $t_0 = \emptyset$ und $t_{n+1} = t_n \cup \{t_n\}$. Mit der Definition von ω aus der Vorlesung gilt also $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = 3$,... in jedem Modell der Mengenlehre. Zeigen Sie:

(a) Gibt es ein Modell von **ZF**, so gibt es auch ein Modell $\mathfrak{M} = (M, \epsilon) \models \mathbf{ZF}$, so dass ein $x \in M$ mit $\mathfrak{M} \models x \in \omega$ aber $\mathfrak{M} \models x \neq t_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert. Ein solches x heißt nonstandard-natürliche Zahl.

(b) Sei $\mathfrak{M}$ wie in (a). Dann gibt es keine Formel φ und $x_1, \ldots, x_n \in M$, so dass

$$x \text{ ist nonstandard-natürliche Zahl} \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models \varphi(x, x_1, \ldots, x_n)$$

gilt. D.h. die nonstandard-natürlichen Zahlen bilden keine "Klasse".

Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet.

Abgabe: am 30. 06. 06 in der Vorlesung