Mathematisches Institut
der Universität Bonn
P. Koepke, B. Irrgang

SoSe 2006
07. 04. 06
Blatt 1

Übungen zur Einführung in die Mathematische Logik

1. Sei $S = \{\circ, e\}$ die Symbolmenge der Gruppentheorie. Entscheiden Sie (mit Beweis), welche der folgenden Zeichenreihen Terme in T^S sind:

$$v_1 \circ (v_2 \circ v_3) \quad \circ \circ v_1 v_2 v_3 \quad \circ \circ v_2 \quad \circ\, v_1 \circ v_2 \circ v_3.$$

2. Zeigen Sie: Der Termkalkül hat eindeutige Zerlegung.

3. Seien $t, s \in T^S$ Terme. Sei $t\frac{s}{v}$ der Term der aus t entsteht, wenn man darin die Variable v durch s ersetzt. Definieren Sie die Funktion

$$G : T^S \to T^S,\ t \mapsto t\frac{s}{v}$$

durch Rekursion (über den Termkalkül).

4. Grammatiken erzeugen die Wörter einer Sprache, indem sie neben den Symbolen noch ein Startsymbol und nichtterminale Symbole vorgeben, für die nach bestimmten Regel wieder andere Symbole eingesetzt werden dürfen. Die Wörter, die so erzeugt werden und nur die ursprünglichen Symbole enthalten, heißen dann die Wörter der Sprache:
Sei $\mathbb{A} := \{a, b\}$ und $\mathbb{B} := \mathbb{A} \cup \{t\}$. Eine Regel $r \subseteq \mathbb{B}^* \times \mathbb{B}^*$ heiße kontextfrei, falls gilt:
(a) Falls $(w, w') \in r$, dann ex. $v, v', u \in \mathbb{B}^*$ mit $w = vtv'$ und $w' = vuv'$
(b) Für alle Wörter $w, w', v, v', u \in \mathbb{B}^*$ gilt $(wtw', wuw') \in r \;\Leftrightarrow\; (vtv', vuv') \in r$.
Sei r_0 die Regel $\{(\emptyset, t)\}$. Wir nennen $L \subseteq \mathbb{A}^*$ kontextfrei, falls es eine kontextfreie Regel r gibt mit $L = Erz(\{r, r_0\}) \cap \mathbb{A}^*$. Zeigen Sie:
(a) $L_0 := \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist kontextfrei.
(b) $L_1 := \{w \in \mathbb{A}^* \mid w \text{ enthält genausoviele } a\text{s wie } b\text{s}\}$ ist kontextfrei.

Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet.

Abgabe: am 21. 04. 06 in der Vorlesung