Mathematisches Institut
der Universität Bonn
P. Koepke, B. Irrgang

SoSe 05
26. 09. 05

Wiederholungsklausur zur Mathematik für Informatiker II a

Bitte geben Sie auf jedem Blatt Ihrer Lösung Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer an.

Name: DPO:

Vorname: Übungsgruppe:

Matrikelnummer:

Tragen Sie bitte bei Aufgaben, die Sie nicht bearbeitet haben, einen Strich ein:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Punkte								

Vorkorrigierender:

Prüfer: Note:

Viel Erfolg!

1. Sei $\sigma = (S, F, R, K, fct)$ eine Signatur. Definieren Sie rekursiv die Menge T^σ der σ-Terme und den Typ $\tau(t)$ eines Terms t. Definieren Sie außerdem den Begriff der relationalen Aussage.

2. Sei $G = (E, K)$ ein Graph. Für $a, b \in E$ sei genau dann $a \sim b$, wenn es einen Weg von a nach b gibt. Zeigen Sie: Die Relation $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf E.

3. Kennzeichnen Sie die wahren Aussagen in der Box durch `w`, die falschen durch `f`. Sie brauchen Ihre Antworten nicht zu begründen. Sie erhalten zwei Punkte für jede richtige Antwort, -2 Punkte für jede falsche, aber mindestens 0 Punkte für die Aufgabe insgesamt.

- ☐ Ist $(B, +, \cdot, -, 0, 1)$ eine beliebige Boolesche Algebra, so ist $x \leq y :\Leftrightarrow x + y = 1$ eine partielle Ordnung auf B.
- ☐ In jedem Hamiltonschen Graphen hat jede Ecke Grad 2.
- ☐ Sei σ eine Signatur und $\varphi \in Aus^\sigma$ beliebig. Ist dann $\neg\varphi$ erfüllbar, so gibt es kein σ-Modell $\mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{M} \models \varphi$.
- ☐ Ist $(X, \leq)$ ein beliebiger Verband und $x \in X$, so gibt es genau ein y mit $x \sqcup y = \top$ und $x \sqcap y = \bot$.

Bitte wenden!

4. Sei σ eine Signatur und seien $\varphi, \psi, \chi \in Aus^\sigma$. Führen Sie einen formalen Beweis für folgende Tautologie:

$$(((\varphi \wedge \chi) \vee (\psi \wedge \chi)) \rightarrow ((\varphi \vee \psi) \wedge \chi)).$$

5. (a) Sei σ eine Signatur mit nur einer Sorte s, einem zweistelligen Relationssymbol r und keinen weiteren Symbolen. Geben Sie (ohne Beweis) eine Aussage $\varphi \in Aus^\sigma$ an, so dass für alle Graphen $G = (E, K)$ und alle Belegungen β in G genau dann $(G, \beta) \models \varphi$ gilt, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:

G enthält einen Zyklus der Länge 3.

(b) Geben Sie entsprechend auch eine Aussage φ für die folgende Bedingung an:

Jede Ecke von G hat Grad 2.

6. Der Senat einer Stadt umfasst 57 Sitze. Es stehen 5 Parteien zur Wahl.

(a) Wieviele mögliche Sitzverteilungen gibt es?

(b) Wieviele mögliche Wahlergebnisse gibt es? Betrachten Sie dabei nur die Reihenfolge der Parteien. Und nehmen Sie an, dass keine zwei Parteien gleich stark sind.

(c) Wieviele Koalitionen aus drei Parteien sind möglich?

7. Sei $\mathfrak{A} = (\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1)$ die Struktur der rationalen Zahlen mit Addition und Multiplikation als Funktionen und den Konstanten 0 und 1. Sei $h : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ ein Isomorphismus. Zeigen Sie:

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $h(n) = n$.

(b) Für alle $m \in \mathbb{Z}$ gilt $h(m) = m$.

(c) Für alle $\frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$ mit $m, n \in \mathbb{Z}$ gilt $h(\frac{n}{m}) = \frac{n}{m}$.

Mit anderen Worten: Die Identität ist der einzige Automorphismus von $\mathfrak{A}$.

Jede Aufgabe wird mit 8 Punkten bewertet.