

Übungen zur Mathematik für Informatiker II a

25. Sei σ eine Signatur und seien $\varphi, \psi, \chi \in \text{Aus}^\sigma$. Führen Sie formale Beweise für folgende Tautologien:

- (a) $((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\chi \rightarrow \psi)) \rightarrow ((\varphi \vee \chi) \rightarrow \psi)$
- (b) $(\varphi \vee \psi) \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \psi)$.

26. Substitution:

Sei $\sigma = (S, F, R, K, fct)$ mit $s \in S$ eine Signatur. Für Terme $t, u \in T^\sigma$ und die Variablen v_n^s mit $\tau(u) = s$ definiere man rekursiv den Term $t \frac{u}{v_n^s}$:

(i) Ist t ein Variablensymbol, so sei

$$\begin{aligned} t \frac{u}{v_n^s} &= t, \text{ falls } t \neq v_n^s, \\ t \frac{u}{v_n^s} &= u, \text{ falls } t = v_n^s. \end{aligned}$$

(ii) Ist t ein Konstantensymbol c , so sei $t \frac{u}{v_n^s} = c$.

(iii) Ist t von der Form $f(t_1, \dots, t_k)$, so sei $t \frac{u}{v_n^s} = f(t_1 \frac{u}{v_n^s}, \dots, t_k \frac{u}{v_n^s})$.

Zeigen Sie durch Induktion:

Für alle σ -Modelle \mathfrak{M} , Terme t, u und Variablen v_n^s mit $\tau(u) = s$ gilt:

$$\mathfrak{M} \frac{\mathfrak{M}(u)}{v_n^s}(t) = \mathfrak{M}(t \frac{u}{v_n^s}).$$

27. Sei σ eine Signatur. Ein Aussage $\varphi \in \text{Aus}^\sigma$ heiße positiv, falls sie $\neg, \rightarrow, \leftrightarrow$ nicht enthält. Zeigen Sie: Jede positive Aussage ist erfüllbar.

Hinweis: Geben Sie zunächst ein einelementiges σ -Modell an, so dass darin alle atomaren, positiven Aussagen gelten. Zeigen Sie dann durch Induktion, dass darin alle positiven Aussagen gelten.

Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet.

Abgabe bis spätestens 20. Juni 2005, 14.00 Uhr, Übungskasten, Römerstr., Neubau, 1. Stock, vor dem Eingang zur Empore des Audimax

Internet: www.math.uni-bonn.de/people/irrgang/MIIA05.html

Bitte geben Sie auf Ihrer Lösung groß die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.