Mathematisches Institut
der Universität Bonn
P. Koepke, B. Irrgang

SoSe 05
02. 05. 05
Blatt 4

Übungen zur Mathematik für Informatiker II a

10. Sei r die in Aufgabe 9 definierte Relation.

(a) Zeigen Sie: Ist $s, t \in x_p$ und $s \leq_r t$, so ist $s \leq_p t$.

Entsprechend gilt, wenn $s, t \in x_q$ und $s \leq_r t$ ist, auch $s \leq_q t$.

(b) Folgern Sie daraus: r ist transitiv.

D.h. Sie müssen aus $s \leq_r t \leq_r u$ folgern, dass $s \leq_r u$ ist. Es reicht, wenn Sie dies für $s, u \in x_p$ und $t \in x_q$ tun. Die übrigen Fälle gehen analog.

11. Sei $(B, +, \cdot, -, 0, 1)$ eine Boolesche Algebra mit $0 \neq 1$. Definiere

$$u \oplus v = (u \cdot (-v)) + (v \cdot (-u)).$$

Zeigen Sie, dass dann $(B, \oplus, \cdot, -, 0, 1)$ ein Ring ist.

12. Sei $n \in \mathbb{N}$, $\overline{1} = 0$, $\overline{0} = 1$, $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1$, $1 + 0 = 1$ und $1 + 1 = 1$. Die Menge $\{0, 1\}^n$ wird durch $(x_1, \ldots x_n) \cdot (y_1, \ldots y_n) = (x_1 y_1, \ldots, x_n y_n)$, $(x_1, \ldots x_n) + (y_1, \ldots y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$ und $\overline{(x_1, \ldots x_n)} = (\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n})$ zu einer Booleschen Algebra.

(a) Sei $t = (t_1, \ldots, t_n) \in \{0, 1\}^n$. Definiere eine Funktion $f^t : \{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$ durch

$f^t(x_1, \ldots x_n) = 1$, falls $t_1 = x_1, \ldots, t_n = x_n$,
$f^t(x_1, \ldots x_n) = 0$ sonst.

Zeigen Sie, dass sich f^t als Produkt von Faktoren der Form $x_1, \ldots, x_n, \overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}$ schreiben lässt.

(b) Zeigen Sie, dass sich jedes $f : \{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$, $f \neq 0$, als Summe von Funktionen wie in (a) schreiben lässt.

Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet.

Abgabe bis spätestens 9. Mai 2005, 14.00 Uhr, Übungskasten, Römerstr., Neubau, 1. Stock, vor dem Eingang zur Empore des Audimax

Internet: www.math.uni-bonn.de/people/irrgang/MIIA05.html

Bitte geben Sie auf Ihrer Lösung groß die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.