Mathematisches Institut
der Universität Bonn
P. Koepke, B. Irrgang

SoSe 05
26. 07. 05

Klausur zur Mathematik für Informatiker II a

Bitte geben Sie auf jedem Blatt Ihrer Lösung Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer an.

Name: DPO:

Vorname: Übungsgruppe:

Matrikelnummer:

Tragen Sie bitte bei Aufgaben, die Sie nicht bearbeitet haben, einen Strich ein:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Punkte								

Vorkorrigierender:

Prüfer: Note:

Viel Erfolg!

1. Definieren Sie die folgenden Begriffe: partielle Ordnung, Infimum, Supremum, Verband. Geben Sie dabei die drei Eigenschaften einer partiellen Ordnung in prädikatenlogischer Schreibweise an. Definieren Sie bei Infimum und Supremum bitte auch, was eine obere bzw. untere Schranke ist.

2. Sei $G = (E, K)$ ein Eulerscher Graph mit $|E| \geq 2$. Zeigen Sie, dass dann jede Ecke $a \in E$ geraden Grad $\delta(a)$ hat.

3. Kennzeichnen Sie die wahren Aussagen in der Box durch `w`, die falschen durch `f`. Sie brauchen Ihre Antworten nicht zu begründen. Sie erhalten zwei Punkte für jede richtige Antwort, -2 Punkte für jede falsche, aber mindestens 0 Punkte für die Aufgabe insgesamt.

- ☐ Jede erfüllbare Aussage ist formal beweisbar.
- ☐ Wenn ein Graph G einen Spannbaum enthält, dann ist G zusammenhängend.
- ☐ In jedem Verband X gilt $\forall x, y, z\ x \sqcup (y \sqcap z) = (x \sqcup y) \sqcap (x \sqcup z)$.
- ☐ Es gibt 10 3-Kombinationen aus $\{1, \ldots, 5\}$.

Bitte wenden!

4. Sei σ eine Signatur und seien $\varphi, \psi, \chi \in Aus^\sigma$. Führen Sie einen formalen Beweis für folgende Tautologie:

$$(((\varphi \vee \psi) \wedge \chi) \rightarrow ((\varphi \wedge \chi) \vee (\psi \wedge \chi))).$$

5. (a) Sei σ eine Signatur mit nur einer Sorte s, einem zweistelligen Relationssymbol r und keinen weiteren Symbolen. Geben Sie (ohne Beweis) eine Aussage $\varphi \in Aus^\sigma$ an, so dass für alle Graphen $G = (E, K)$ und alle Belegungen β in G genau dann $(G, \beta) \models \varphi$ gilt, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:

$$G \text{ hat genau drei Ecken, d.h. } |E| = 3.$$

(b) Geben Sie entprechend auch eine Formel φ für die folgende Bedingung an:

$$G \text{ hat genau zwei Kanten, d.h. } |K| = 4.$$

6. Sei σ eine Signatur. Definiere für alle $\varphi \in Aus^\sigma$ rekursiv $\varphi^* \in Aus^\sigma$ durch

$\varphi^* := \varphi$, falls φ eine relationale Aussage ist
$(\neg\varphi)^* := \neg\varphi^*$
$(\varphi \vee \psi)^* := (\varphi^* \vee \psi^*)$
$(\varphi \wedge \psi)^* := \neg(\neg\varphi^* \vee \neg\psi^*)$
$(\varphi \rightarrow \psi)^* := (\neg\varphi^* \vee \psi^*)$
$(\exists v_n^s \varphi)^* := \exists v_n^s \varphi^*$
$(\forall v_n^s \varphi)^* := \forall v_n^s \varphi^*$.

Zeigen Sie durch Induktion: Für alle σ-Modelle $\mathfrak{M}$ und alle $\varphi \in Aus^\sigma$ gilt $\mathfrak{M} \models \varphi$ genau dann, wenn $\mathfrak{M} \models \varphi^*$ ist.

7. Sei $1 \leq n \in \mathbb{N}$. Sei M die Menge aller Strukturen $(S, \otimes)$ mit $S = \{1, \ldots, n\}$ und einer zweistelligen Funktion $\otimes : S^2 \rightarrow S$. Dann ist die Isomorphie $\cong$ eine Äquivalenzrelation auf M. Sei G die Menge der Permutationen von S.

(a) Zeigen Sie: Zu jeder Struktur $(S, \otimes) \in M$ und jedem $\pi \in G$ gibt es eine eindeutig bestimmte Struktur $(S_\pi, \otimes_\pi)$, so dass $\pi : (S, \otimes) \rightarrow (S_\pi, \otimes_\pi)$ ein Isomorphismus ist.

Sei nun $S = \{1, 2\}$ und π die nicht triviale Permutation von S.

(b) Bestimmen Sie: Wieviele Elemente hat M? Für wieviele Strukturen $(S, \otimes) \in M$ ist $(S_\pi, \otimes_\pi) = (S, \otimes)$? Wieviele Äquivalenzklassen hat $(M, \cong)$?

Jede Aufgabe wird mit 8 Punkten bewertet.