Mathematisches Institut
der Universität Bonn
P. Koepke, B. Irrgang

WS 04/05
10. 11. 04
Blatt 5

Übungen zur Mengenlehre I

17. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen unter **ZF** äquivalent sind:

(i) **(AC)**, d.h. $\forall a \exists f\ (f : a \to V \wedge \forall u \in a\ (u \neq \emptyset \to f(u) \in u))$

(ii) Jede Äquivalenzrelation auf einer Menge hat ein vollständiges Repräsentantensystem

(iii) Jedes Produkt nicht leerer Mengen ist nicht leer.

18. (a) Zeigen Sie: $\omega \times \omega \sim \omega$.

(b) Betrachten Sie die Mengen $\{f \mid f : \omega \to 2\}$, $\{f : \omega \to \omega \mid f \text{ bijektiv}\}$, $\mathfrak{P}(\omega)$ und $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$. Zeigen Sie, dass diese gleichmächtig sind.

19. Sei $\alpha \in On$ und $\alpha \sim \omega$. Beweisen Sie, dass es dann eine ordnungserhaltende Injektion $f : \alpha \to \mathbb{Q}$ gibt.

20. Eine Menge x heisst Dedekind-unendlich, wenn es ein $y \subseteq x$ mit $y \neq x$ und $y \sim x$ gibt.

Zeigen Sie in **ZF**: Eine Menge ist genau dann Dedekind-unendlich, wenn sie eine abzählbar unendliche Teilmenge hat.

Folgern Sie daraus, dass unter **ZFC** unendlich und Dedekind-unendlich äquivalent sind.

Jede Aufgabe wird mit 8 Punkten bewertet.

Abgabe: am 17. 11. 04 in der Vorlesung

Internet: www.math.uni-bonn.de/people/irrgang/MengenlehreI.html